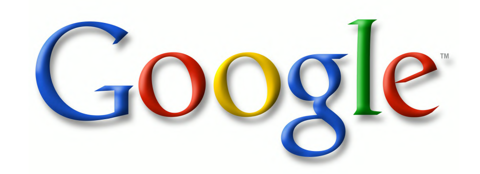
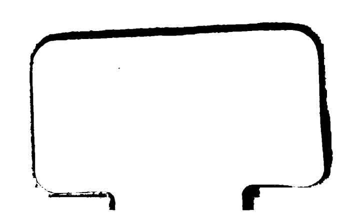

Google


VE
RI
TAS



Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.



Achter Band. Zweites Heft.

Enthaltend:

Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.

Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

von



Arthur Schoenflies
in Königsberg i. Pr.

Mit 8 Figuren im Text.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

G. Hauck in Berlin. und **A. Gutzmer** in Jena.



Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1900.

Ausgegeben am 13. September 1900.

Jeder Käufer verpflichtet sich zum Bezuge des ganzen, aus zwei Hefte[n] bestehenden Bandes.

Des V. Bandes Schlufs-Lieferung, mit dem Referat von E. Kötter, ersc[heint]

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

VIII. Band. 2 Hefte. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von G. Hauck in Berlin und A. Gutzmer in Jena. gr. 8. 1900. geh.

Inhalt des I. Heftes:

I. Die Chronik der Vereinigung für das Jahr 1899.

1. Bericht über die Jahresversammlung zu München am 17. bis 22. September 1899. — 2. Geschäftlicher Bericht. — 3. Kassenbericht.
4. Statuten u. Geschäftsordnung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
5. Mitglieder-Verzeichnis nach dem Stande vom 31. December 1899.
6. Zum Gedächtnis:
   Louis Gonzaga Gascó.
   C. J. Gerhardt. Von **M. Cantor.** Mit Porträt.
   Sophus Lie. Von **Friedrich Engel.** Mit Porträt.
   Eugen von Lommel. Von **Ludwig Boltzmann.** Mit Porträt.
   Friedrich Meyer. Von **G. Riehm.** Mit Porträt.
   Hermann Schapira. Von **C. Koehler.** Mit Porträt.
   Karl Schober. Von **W. Wirtinger.** Mit Porträt.

II. Die auf der Versammlung in München gehaltenen Vorträge.

Boltzmann, L., über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit.
Weber, H., Wirkung der neuen preufsischen Prüfungsordnung für Lehramtscandidaten auf den Universitätsunterricht.
Hauck, G., Correferat.
Klein, F., Bemerkungen zu den vorstehenden Referaten.
Krazer, A., über den Unterricht in der darstellenden Geometrie an der Universität Strafsburg.
Study, E., einige Bemerkungen zu der neuen preufs. Prüfungsordnung.
Berichte und Discussion über die Decimalteilung der Winkel- und Zeitgröfsen. (Von Mehmke, Bauschinger, Schülke u. A.)
Noether, M., über Riemann's Vorlesungen von 1861—62 über Abel'sche Functionen.
Gordan, P., über die symmetrischen Functionen.
——, über homogene Functionen.
Hilbert, D., über den Zahlbegriff.
——, über das Dirichlet'sche Princip.
Sommerfeld, A., Bemerkungen zur Variationsrechnung.
Sommer, J., über Eigenschaften quadratischer Mannigfaltigkeiten in höheren Räumen.
Engel, Fr., zwei merkwürdige Gruppen des Raumes von fünf Dimensionen.
Zindler, K., über Complexcurven und ein Theorem von Lie.
Doehlemann, K., über hyperboloidische Gerade.
Brill, A., über ein Beispiel des Herrn Boltzmann zu der Mechanik von Hertz.
Study, E., die Geometrie der Dynamen.
Schimpf, E., Einführung eines Mafses der Convergenz in die Lehre von der Convergenz der unendlichen Processe.
Lerch, M., Arithmetisches über unendliche Reihen.
Horn, J., divergente Reihen in der Theorie der Differentialgleichungen.
Weber, E. v., eine fundamentale Classification der Differentialprobleme.
Hensel, K., über eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen.

Inhalt des II. Heftes:

III. Referat, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung:

Schoenflies, A., die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschlufs ihrer Anwendungen. Herausgegeben im Auftrage der Akademieen der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 5—6 Heften. Jährlich 1 Band. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. Band: **Arithmetik und Algebra.**				II. Band: **Analysis.**			
1. Heft.	[S. 1—112.]	1898.	n. ℳ 3.40.	1. Heft.	[S. 1—160.]	1899.	n. ℳ 4.80.
2. —	[S. 113—224.]	1899.	n. ℳ 3.40.	2./3. —	[S. 161—400.]	1900.	n. ℳ 7.50.
3. —	[S. 225—352.]	1899.	n. ℳ 3.80.	4. —	[S. 401—560.]	1900.	n. ℳ 4.80.
4. —	[S. 353—512.]	1899.	n. ℳ 4.80.				
5. —	[S. 513—720.]	1900.	n. ℳ 6.40.	[Fortsetzung u. d. Pr.]			

Brückner, Dr. **Max,** Oberlehrer am Gymnasium zu Bautzen, Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte. Mit 7 lithographierten und 5 Lichtdruck-Doppeltafeln, sowie vielen Figuren im Text. [VIII u. 227 S.] 1900. 4. geh. n. ℳ 16.—

Cantor, Hofrat Prof. Dr. **Moritz,** Heidelberg, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 3 Bänden. II. Band. Von 1200—1668. 2. Aufl. Mit 190 in den Text gedruckten Figuren. [XII u. 943 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 26.—

——— ——— III. Band. I. Abt. Von 1668—1699. 2. Aufl. Mit 45 in den Text gedr. Fig. [216 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 6.60.

Engel, Dr. **Friedrich,** Prof. a. d. Universität Leipzig, Sophus Lie. Ausführliches Verzeichnis seiner Schriften. Mit dem Bildnis Sophus Lies in Heliogravüre. [42 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 2.—

Föppl, Dr. **A.,** Professor an der Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. 4 Bände. gr. 8. In Leinwand geb.

I. **Band: Einführg. i. d. Mechanik.** M. 96 Fig. i. T. [XIV u. 412 S.] 2. Aufl. 1900. n. ℳ 10.—
II. **Band: Graphische Statik.** [In Vorbereitung.]
III. **Band: Festigkeitslehre.** M. 79 Fig. i. Text. [XVIII u. 512 S.] 2. Aufl. 1900. n. ℳ 12.—
IV. **Band: Dynamik.** Mit 69 Figuren im Text. [XIV u. 456 S.] 1899. n. ℳ 12.—

Fricke, Dr. **Robert,** Prof. a. d. Techn. Hochschule zu Braunschweig, kurzgefafste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-functionentheoretischer Teil. Mit 102 in den Text gedruckten Figuren. [IX u. 520 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 14.—

Hilbert, Dr. **D.,** Prof. an der Universität Göttingen, Grundlagen der Geometrie. Mit 50 Textfiguren A. u. d. T.: Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals. I. Teil. [92 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 3.20.

Hölder, Otto, o. Prof. d. Mathematik in Leipzig, Anschauung und Denken in der Geometrie. Akademische Antrittsvorlesung, gehalten am 22. Juli 1899. Mit Zusätzen, Anmerkungen und einem Register. [75 S.] 1900. gr. 8. geh. n. ℳ 2.40.

Klein, F., und **E. Riecke**, über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an höheren Schulen. Vorträge, gehalten in Göttingen, Ostern 1900, bei Gelegenheit des Ferienkurses. Mit einem Wiederabdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von F. Klein. [VI u. 252 S.] Mit 84 Textfiguren. gr. 8. 1900. geb. n. ℳ 6.—

Netto, Dr. Eugen, Professor der Mathematik an der Universität zu Gießen, Vorlesungen über Algebra. In 2 Bänden. II. Band. 2. (Schluß-) Lieferung. [XI u. S. 193—327.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 10.—

Pascal, Ernst, o. Prof. a. d. Univ. zu Pavia, Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literatur). Autorisirte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von A. Schepp, Oberleutnant a. D. zu Wiesbaden. In 2 Teilen: Analysis und Geometrie. I. Teil: Die Analysis. [XII u. 638 S.] gr. 8. 1900. In Leinw. geb. n. ℳ 10.—

——— die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die neueren Forschungen. Deutsch von Dr. H. Leitzmann. [XVI u. 266 S.] gr. 8. 1900. geb. n. ℳ 10.—

Schilling, Dr. Friedrich, a. o. Professor an der Universität Göttingen, über die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung in dieses Gebiet. Mit 28 Abbildungen. [47 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 2.—

Sturm, Dr. Rud., Prof. a. d. Universität zu Breslau, Elemente der darstellenden Geometrie. 2., umgearb. u. erweit. Aufl. Mit 61 Fig. im Text u. 7 lith. Tafeln. [V u. 157 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 5.60.

Suter, H., Prof. am Gymnasium in Zürich, die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. [A. u. d. T.: Abhandlungen z. Geschichte d. mathem. Wissenschaften. 10. Heft.] [IX u. 278 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 14.—

Volkmann, Dr. P., o. ö. Professor der theoretischen Physik an der Universität Königsberg i. Pr., Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. Vorlesungen. [XVI u. 370 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 14.—

von Weber, Dr. E., Privatdocent an der Universität München, Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. [XI u. 622 S.] gr. 8. 1900. In Leinwd. geb. n. ℳ 24.— A. u. d. T.: Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften. Band II.

Wassiljef, A., u. **N. Delaunay**, P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen. — Die Tschebyschef'schen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen. Mit Porträt Tschebyschefs. [IV u. 70 S.] 1900. gr. 8. geh. n. ℳ 4.—

Wiechert, Emil, Professor an der Universität Göttingen, Grundlagen der Elektrodynamik. A. u. d. T.: Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals. II. Teil. [112 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 3.60.

D

DIE ENTWICKELUNG DER LEHRE VON DEN

PUNKTMANNIGFALTIGKEITEN.

BERICHT,

ERSTATTET DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

VON

ARTHUR SCHOENFLIES,

O. Ö. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT IN KÖNIGSBERG I. PR.

Vorwort.

Von dem Bericht über „Curven und Punktmannigfaltigkeiten“, mit dessen Erstattung mich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung betraut hat, übergebe ich hiermit den ersten gröfseren Teil der Öffentlichkeit.

Als ich vor einigen Jahren mich bereitwilligst entschlofs, der an mich ergangenen Aufforderung nachzukommen, vermutete ich nicht, dafs ich mich heute meiner Verpflichtung nur teilweise entledigen würde. Aber äufsere und innere Umstände tragen hieran zu gleichen Teilen die Schuld. Um nur von den inneren zu sprechen, so handelt es sich um einen Wissenszweig, der noch im Werden begriffen ist, und dem gegenüber ich doch wieder den natürlichen Wunsch empfand, ein wenigstens teilweise abgeschlossenes Bild zu liefern. Dazu kommt, dafs die Einflufssphäre der Mengenlehre täglich wächst, und dafs gerade die letzte Zeitspanne wichtige Arbeiten geliefert hat, die zu berücksichtigen waren und sogar zwangen, einzelne Teile umzuformen. Dies hat selbst während des Druckes noch an einzelnen Stellen geschehen müssen, wodurch allerdings die Rundung der Disposition teilweise gelitten haben mag.

Der Bericht hat in seinen beiden ersten Abschnitten mehr die Form eines Lehrbuches angenommen. Aber da es sich hier um ein jedenfalls in seinen Einzelheiten noch wenig gekanntes Gebiet handelt, so durfte ich nur auf diese Weise hoffen, mich in den Teilen, die die Anwendungen enthalten, knapper und doch verständlich fassen zu können. Was die Darstellung betrifft, so darf ich die Beweismethoden, wie auch die genetische Entwickelung, die ich dem Bericht gegeben habe, vielfach als eigene Arbeit erklären. Hoffentlich läfst sie hervortreten, dafs hier wie auch sonst, einige wenige charakteristische Begriffe und Sätze vorhanden sind, die für die verschiedensten Probleme in gleicher Weise die Grundlage der Schlüsse bilden. Auch von den Resultaten darf ich einige als mein Eigentum beanspruchen.

Zur Orientirung über die dem Bericht eigentümlichen mengentheoretischen Begriffe habe ich ein Sachregister angefügt.

Das Interesse, dessen sich die Mengentheorie in den letzten Jahren erfreuen konnte, hat sich ständig gesteigert. Wenn es mir gelungen sein sollte nachzuweisen, daſs dieses Interesse ein wohlverdientes ist, und daſs diese in ihren ersten Anfängen scheinbar so controverse Disciplin ebenso fundamentale und notwendige, wie auch weittragende Methoden besitzt, so würde dieser Bericht dem Zweck, den ich ihm wünsche, entsprechen.

Allen den Herren, die mich beim Lesen der Correctur freundlichst unterstützt haben, besonders Herrn Privatdocenten Dr. J. Sommer in Göttingen, sage ich auch an dieser Stelle vielen Dank. Mein Dank gebührt auch der Verlagsbuchhandlung, die es ermöglicht hat, den Bericht trotz der zahlreichen Correcturen, die vielfach nötig waren, rechtzeitig erscheinen zu lassen.

Königsberg i./Pr., im September 1900.

A. Schoenflies.

Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Achter Band.

Enthaltend die Chronik der Vereinigung für das Jahr 1899,
die auf der Versammlung in München gehaltenen Vorträge,

sowie:

Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.

Bericht von Arthur Schoenflies in Königsberg i. Pr.

Mit 8 Figuren im Text.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

G. Hauck in Berlin und **A. Gutzmer** in Jena.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1900.

Inhalt.

Erstes Heft.

I. Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

II. Die auf der Versammlung zu München gehaltenen Vorträge.

Zweites Heft.

III. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.

Berichtigung.

Im Jahresbericht VIII, Heft 1, S. 49, Z. 23 v. o. muſs es heiſsen „Enkelin“ statt „Tochter“.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Litteraturbemerkung.

Die nachstehenden Werke sind im Bericht abkürzend citirt worden.

B. Bolzano, Paradoxieen des Unendlichen, herausgegeben von F. Přchonsky. Leipzig, 1851.
É. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, 1898.
G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Leipzig, 1883.
R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig, 1887 u. 1893.
U. Dini, Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Gröfse, übersetzt von J. Lüroth und A. Schepp. Leipzig, 1892.
A. Harnack, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig, 1881.
C. Jordan, Cours d'analyse de l'école polytechnique. Paris, 1893—1896.
O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Leipzig, 1893—1899.
J. Thomae, Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale. Halle, 1875.
J. Thomae, Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen (2. Aufl.). Halle, 1898.

Endlich erwähne ich, dafs G. Cantor's „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" auch in Math. Ann. 21, S. 453 erschienen und meist in dieser Weise citirt sind. Ebenso ist das Hankel'sche Universitätsprogramm: „Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen" (Freiburg, 1870) mit dem Hinweis auf Math. Ann. 20, S. 63 citirt, wo sich ein Abdruck davon befindet.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen.

„Das Wesen der Mathematik
liegt in ihrer Freiheit."
Georg Cantor
(Math. Ann. Bd. 21, S. 564).

Die Entwickelung der Mengenlehre hat ihre Quelle in dem Bestreben, für zwei grundlegende mathematische Begriffe eine klärende Analyse zu schaffen, nämlich für die Begriffe des Arguments und der Function. Beide Begriffe haben im Lauf der Jahre sehr wesentliche Wandlungen durchgemacht. Der Begriff des Arguments resp. der unabhängigen Variablen deckte sich ursprünglich mit dem nicht weiter definirten, naiven Begriff des geometrischen Continuums; heute ist es durchaus geläufig, als Wertvorrat des Arguments jede beliebige Wertmenge oder Punktmenge zuzulassen, die man aus dem Continuum auf Grund einer irgendwie definirten Vorschrift herausheben mag. Noch einschneidender ist die Wandlung, die den Functionsbegriff betroffen hat. Sie dürfte innerlich an den von Fourier aufgestellten Satz anknüpfen, dafs eine sogenannte willkürliche Function durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist; äufserlich findet sie ihren Ausdruck in der auf Dirichlet zurückgehenden Definition, die den allgemeinen Functionsbegriff kurzgesprochen als Äquivalent einer willkürlichen Tabelle betrachtet. Als sodann Riemann ein erstes Beispiel einer analytisch darstellbaren Function aufstellte, die in jedem rationalen Punkt unstetig, in jedem irrationalen Punkt stetig ist, sah man sich plötzlich Möglichkeiten gegenüber, für deren Ergründung die bis dahin geläufigen Vorstellungen durchaus unzureichend waren. Es erstand die Notwendigkeit, gesetzmäfsig bestimmte Mengen unendlich vieler Punkte auf ihre innere Structur und ihre Eigenschaften zu untersuchen, und man sah, dafs zu ihrer Beherrschung durchaus neue Begriffe und Formulirungen nötig waren. Den ersten Versuch, diesen Dingen methodisch gerecht zu werden, unternahm H. Hankel in seinem bekannten Tübinger Programm. Neben ihm hat sich an der Bewältigung der bezüglichen Aufgaben als einer der eifrigsten P. du Bois-Reymond beteiligt; seine allgemeine Functionenlehre enthält geradezu eine mathematisch-philosophische Erörterung

der beiden obengenannten Begriffe. Allerdings entsprach der Erfolg nicht ganz der Energie der aufgewandten geistigen Arbeit; trotz mancher fruchtbaren Ideen und Anregungen ist du Bois vielfach nur dazu gelangt, die Probleme, die hier vorliegen, zu bezeichnen, ohne sie jedoch systematisch zu erledigen. Es blieb Georg Cantor vorbehalten, diejenigen Ideen zu erfinden, die sich für eine methodische Untersuchung als geeignet erwiesen und es ermöglichten, auch die unendlichen Mengen unter die Herrschaft der mathematischen Formeln und Gesetze zu zwingen. Sicher gehörte ebensoviel Kühnheit wie Überzeugungskraft dazu, um Dinge, die über das Endliche hinausgehen, zu einer mathematischen Disciplin zu erheben; nach Cantor's eigenem Zeugnis wissen wir[1]), dafs er zehn Jahre zögerte, ehe er sich entschlofs, seine Ideen vor das mathematische Publicum zu bringen. Er that es erst, als die Erkenntnis von ihrer Unumgänglichkeit in ihm erstand, und er sich die Überzeugung gebildet hatte, dafs seine Begriffe den allgemeinen Eigenschaften wohldefinirter mathematischer Objecte genügen[2]).

Mengen von unendlich vielen Elementen sind allerdings auch sonst schon Gegenstand mathematischer Operationen gewesen, insbesondere im Gebiet der Geometrie, wo man längst gewohnt war, Mengen rücksichtlich ihrer Mächtigkeit zu vergleichen. Aber doch wäre es verfehlt, hierin mehr als eine äufserliche Analogie zu sehen. Wenn auch Cantor, wie er gelegentlich angiebt[3]), die Bezeichnung resp. den Begriff der Mächtigkeit von Steiner entlehnt hat, so haben doch die bezüglichen geometrischen Formulirungen mit derjenigen Denkweise, die der Mengenlehre zu Grunde liegt, wenig zu schaffen. Die Mengenlehre als Wissenschaft erstand erst in dem Augenblick, als Cantor die Abzählbarkeit als einen wohldefinirten mathematischen Begriff in die Wissenschaft einführte, unendliche Mengen nach ihrer Mächtigkeit einzuteilen unternahm und insbesondere zeigte, dafs die algebraischen Zahlen eine abzählbare Menge bilden, dafs dagegen das Continuum nicht abzählbar ist. Der einzige Vorgänger, den Cantor auf diesem Gebiet besitzt, ist B. Bolzano. In den Paradoxieen des Unendlichen hat Bolzano nicht allein unendliche Mengen nach ihrer Mächtigkeit zu vergleichen unternommen; es findet sich darin sogar schon diejenige Vorstellung über die Gleichmächtigkeit zweier Mengen ausgesprochen[4]), die hernach Cantor seinen Begriffsbestimmungen zu Grunde gelegt hat.

1) Math. Ann. 17, S. 358 (1880).
2) Die Skepsis, mit der man den Cantor'schen Ideen bei ihrem Erscheinen vielfach begegnete, erhellt am besten aus einigen an Cantor gerichteten Briefen; vgl. Zeitschrift für Philosophie, Bd. 91 u. 92.
3) Math. Ann. 20, S. 116.
4) a. a. O. S. 28. Bei Bolzano erscheint diese Vorstellung allerdings nur als Beispiel einer dem Unendlichen anhaftenden Paradoxie.

Erstes Capitel.

Die Mächtigkeit oder Cardinalzahl.

1. Die Lehre von den unendlichen (überendlichen resp. transfiniten) Mengen ist in ihrem formalen Teil eine Verallgemeinerung der Lehre von den endlichen Zahlen; sie sucht die unendlichen Mengen nach den gleichen Methoden zu verknüpfen, die für endliche Zahlen gelten.

Auf denjenigen Begriff der allgemeinen Mengenlehre, der der endlichen Cardinalzahl entspricht, lassen sich die elementaren Definitionen und die auf ihnen ruhenden directen Rechnungsgesetze ausnahmslos übertragen; dies gilt sowohl von der Summe und dem Product, wie auch von dem Potenzbegriff. Doch liegt zwischen den Beziehungen, die die endlichen resp. die unendlichen Mengen untereinander verbinden, eine tiefe Kluft; sie stammt daher, dafs bei unendlichen Mengen der Teil gleich dem Ganzen sein kann[1]. Diese Thatsache giebt der Lehre von den unendlichen Mengen ihr eigentümliches Gepräge; gerade aus ihr fliefst ein grofser Teil der charakteristischen Sätze und Probleme, durch die sich die Mengenlehre ein immer steigendes Interesse erworben hat.

Bei jeder Verallgemeinerung eines Wissenszweiges ist es bekanntlich das Princip der Permanenz der formalen Gesetze[2], das die Anhaltspunkte für die Formulirung der neuen Begriffe liefert. Es fragt sich daher zunächst, ob und wie es möglich ist, die grundlegenden Begriffe der Zahlenlehre so zu formen, dafs sie auf überendliche Mengen übertragbar werden, ohne doch ihre Giltigkeit für die endlichen Mengen zu verlieren. Die Analyse der arithmetischen Begriffe, an die man in dieser Hinsicht anzuknüpfen hat, ist im wesentlichen auf Dedekind[3] zurückzuführen. Sie

1) Diese Möglichkeit spielt bekanntlich auch für die Theorie des Flächeninhalts eine wichtige Rolle. Sie ist es auch, die die ausnahmslose Übertragbarkeit der indirecten Operationen ausschliefst.

2) In dieser Form zuerst bei H. Hankel; vgl. Vorlesungen über die complexen Zahlen, S. 10 (1867).

3) Was sind etc. Man vgl. insbesondere S. 2, 6, 20.

läfst sich dahin charakterisiren, dafs die Lehre von den ganzen Zahlen auf drei Grundbegriffe zu gründen ist, auf die Begriffe der Menge, der Ordnung und der Abbildung oder eineindeutigen Beziehung. Der Mengenbegriff ist als der ursprünglich resp. objectiv gegebene aufzufassen; das Ordnen und das Abbilden sind die hinzutretenden subjectiven Elemente. Insbesondere führt das Ordnen zum Begriff der Anzahl, das Abbilden zum Gleichheitsbegriff und zu den Gröfsenbeziehungen[1]).

2. Die Vorstellungen Cantor's laufen denen von Dedekind im wesentlichen parallel. Ich lasse hier zunächst die Definitionen folgen, die Cantor an die Spitze der Mengenlehre gestellt hat[2]):

1) Menge ist jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m zu einem Ganzen; $M = \{m\}$.

2) Teil oder Teilmenge von M heifst jede andere Menge M_1, deren Elemente zugleich Elemente von M sind[3]); M_1 heifst in M enthalten.

Falls die Mengen M und N gemeinsame Elemente besitzen, so wird die Menge dieser gemeinsamen Elemente auch gemeinsamer Teiler von M und N genannt und durch $\mathfrak{D}(M, N)$ bezeichnet[4]).

3) Mächtigkeit von M heifst der Allgemeinbegriff, der aus M dadurch hervorgeht, dafs von der Beschaffenheit und Ordnung[5]) der Elemente abstrahirt wird; er wird durch $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$ bezeichnet.

Die Mächtigkeit einer Menge bildet das genaue Analogon des Anzahlbegriffes und wird daher von Cantor auch als Cardinalzahl bezeichnet.

Die einfachsten Beispiele unendlicher Mengen sind die Menge

---

1) Es ist hier nicht der Ort, näher in die Analyse des Zahlbegriffes einzugehen oder auf die umfangreiche darüber vorhandene Litteratur hinzuweisen. Ich habe nur dasjenige kurz anführen wollen, was für die Formulirung der Mengenlehre in Betracht kommt. Die Dedekind'schen Ideen haben übrigens besonders in Italien Aufnahme gefunden; zumal Peano und seine Schüler, so namentlich Bettazzi und Burali-Forti, haben sich im Anschlufs an Dedekind mit der Fortentwickelung der bezüglichen Fragen beschäftigt. Es handelt sich dabei natürlich um nichts anderes, als um die Axiome der Arithmetik.

2) Man vgl. für das folgende insbesondere Math. Ann. 46, S. 481 (1895). Die bezüglichen Definitionen sind teilweise schon vorher in der Zeitschr. f. Philos. 91, S. 95 u. 92, S. 240 (1887) eingeführt worden.

3) Dedekind bezeichnet solche Teilmenge als echten Teil von M, so dafs danach die Teilmenge auch mit M identisch sein kann, was für manche Zwecke nützlich ist (Was sind etc. S. 2 und 3).

4) Math. Ann. 17, S. 355.

5) Über den in diese Definition eingehenden Begriff der Ordnung findet sich näheres in Cap. 5, S. 28.

aller ganzen Zahlen, deren Mächtigkeit wir $\mathfrak{a}$ nennen, ferner die Menge der rationalen, resp. der irrationalen Zahlen, endlich die Menge aller reellen Zahlen, deren Mächtigkeit wir durch $\mathfrak{c}$ bezeichnen, u. s. w. Die Definitionen dieser Mengen bedürfen keiner weiteren Erörterung. Dagegen erheischt die Frage, wann allgemein eine Menge durch eine Definition als bestimmt anzusehen ist, sehr wohl eine Antwort. Cantor hat sich dahin ausgesprochen, dafs es möglich sein mufs, von jedem beliebigen Object anzugeben, ob es seiner Definition nach der Menge angehört oder nicht; jedoch braucht diese Frage nicht praktisch entschieden werden zu können, vielmehr wird nur ihre logische Bestimmtheit gefordert[1]). Auf den gleichen Standpunkt hat sich auch Dedekind[2]) gestellt.

3. Wir fragen zunächst, wann zwei Mengen M und N dieselbe Mächtigkeit besitzen, resp. ob und wie man zwei Mächtigkeiten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ als gleich definiren kann. Die Gleichheit endlicher Zahlen findet bei ein-eindeutigem Entsprechen ihrer Elemente statt; demgemäfs definirt Cantor[3]):

4) Die Mengen M und N heifsen äquivalent oder gleichmächtig ($M \sim N$), falls es möglich ist, sie gesetzmäfsig in eine eineindeutige Zuordnung zu setzen, und

5) Mächtigkeiten oder Cardinalzahlen sind gleich, ($\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$), falls die entsprechenden Mengen M und N äquivalent sind.

Die vorstehende Gleichheitsdefinition fliefst direct aus dem oben genannten Princip der Permanenz der formalen Gesetze. Dies hindert jedoch nicht, dafs die beiden Definitionen, die das endliche und das unendliche Gebiet betreffen, sich inhaltlich in einzelnen Punkten unterscheiden. Zunächst ist zu bemerken, dafs sich die Prüfung der Äquivalenz endlicher Mengen stets durch eine erschöpfende Anzahl von Schritten feststellen läfst; für unendliche Mengen dagegen kann die eineindeutige Beziehung nur durch ein Beziehungsgesetz gegeben werden, das jedem beliebigen Element der einen Menge ein entsprechendes der anderen Menge zuweist und umgekehrt. Die Äquivalenz oder Gleichmächtigkeit zweier Mengen bedeutet ja nichts anderes als die Existenz einer solchen eineindeutigen Beziehung[4]).

---

1) Math. Ann. 20, S. 114. So war die Menge aller algebraischen Zahlen eine wohldefinirte Menge, auch ehe man angeben konnte, ob π dieser Menge angehört oder nicht.

2) Was sind etc. S. 2, Anm.

3) Der Begriff der Äquivalenz findet sich schon in Cantor's erster mengentheoretischer Arbeit, Journ. f. Math. 77, S. 242; vgl. auch den oben S. 2 gegebenen Hinweis auf Bolzano's Paradoxieen, S. 28.

4) So sagt z. B. die durch die Gleichung $xy = 1$ vermittelte Beziehung aus, dafs alle positiven Zahlen zwischen 0 und 1 allen Zahlen gleichmächtig sind, die gröfser als 1 sind.

Aus dieser Thatsache fliefst der zweite Differenzpunkt, der dem Gleichheitsbegriff für endliche und überendliche Cardinalzahlen anhaftet. Es ist der, dafs eine überendliche Menge einer ihrer Teilmengen äquivalent sein kann, was für endliche Mengen nicht zutrifft. So läfst sich z. B. die Menge aller ganzen positiven Zahlen 1, 2, 3, $\cdots \nu \cdots$ der Menge aller geraden positiven Zahlen 2, 4, 6, $\cdots 2\nu \cdots$ in der Weise eineindeutig zuordnen, dafs der Zahl ν die Zahl 2ν entspricht und umgekehrt.

Dieser Umstand ist für die Eigenart der Gesetze der überendlichen Mengen von einschneidender Wichtigkeit. Er war bereits Bolzano[1]) bekannt; Dedekind hat ihn benutzt, um daran die Definition der überendlichen Mengen anzuschliefsen. Mit ihm definiren wir daher[2]):

6) Eine Menge M heifst unendlich oder überendlich (transfinit), falls sie einer ihrer Teilmengen äquivalent ist.

4. Die Gesetze der Addition und Multiplication lassen sich ohne weiteres auf Mächtigkeiten übertragen. Sind $M = \{m\}$ und $N = \{n\}$ zwei Mengen ohne gemeinsames Element, so läfst sich aus ihnen eine Vereinigungsmenge P bilden, in die jedes Element von M sowie jedes Element von N eingeht, und die wir durch

$$P = (M, N) = (N, M)$$

bezeichnen dürfen. Definiren wir dann die Mächtigkeit $\mathfrak{p}$ von P gemäfs der Gleichung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$$

als Summe von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$, so folgt diese Summe den sämtlichen Gesetzen der Addition, dem commutativen, wie dem associativen.

Es ist übrigens zweckmäfsig, auch für die Vereinigungsmenge von M und N die Schreibweise der Addition zu benutzen und

$$P = M + N = N + M$$

zu setzen; man bezeichnet daher auch P kurz als Summe von M und N. Eine Vereinigungsmenge läfst sich übrigens auch dann bilden, wenn M und N gemeinsame Elemente besitzen. Ist Q die Menge der Elemente, die M und N gemeinsam sind, so dafs

$$M = Q + M_1, \quad N = Q + N_1$$

zu setzen ist, so wird die Vereinigungsmenge durch

$$P = (M_1, N_1, Q) = M_1 + N_1 + Q = \mathfrak{M}(M, N)$$

1) Paradoxieen, S. 28. Bolzano erblickt in ihr eine der dem Unendlichkeitsbegriff anhaftenden Paradoxieen.

2) Was sind etc. S. 17. Für den historischen Sachverhalt kommt auch die Anmerkung in Betracht. Vgl. auch Cantor, Journ. f. Math. 84, S. 242, sowie Math. Ann. 46, S. 495, wo sich ein Beweis befindet, dafs die definirende Eigenschaft für jede unendliche Menge erfüllt ist.

dargestellt und heiſst bei Cantor das kleinste gemeinsame Multiplum von M und N[1]).

Zur Multiplication gelangt man, indem man aus M und N die Verbindungsmenge bildet. Sie entsteht, indem man jedes Element m mit jedem Element n zu einer Gruppe (m, n) verbindet; die aus allen diesen Gruppen als neuen Elementen bestehende Menge $P = \{(m, n)\}$ ist die Verbindungsmenge von M und N. Sie läſst sich durch

$$P = (M \cdot N) = (N \cdot M)$$

bezeichnen. Die Mächtigkeit von P kann wieder mittelst der Gleichung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$$

als Product von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ definirt werden. Dieses Product folgt allen Gesetzen der Multiplication, dem commutativen, dem associativen und dem distributiven, wie man leicht bestätigen kann. Die Mächtigkeiten lassen sich daher allen directen Rechnungsoperationen unterwerfen.

Ein Beispiel einer Verbindungsmenge bildet die Menge $Z = \{z\}$ aller Punkte einer Ebene im Sinn der analytischen Geometrie. Ist $X = \{x\}$ die Menge aller Punkte einer Geraden (eine lineare Menge), ebenso $Y = \{y\}$ die Menge aller Punkte einer zweiten Geraden, so wird jeder Punkt z durch ein Elementenpaar (x, y) dargestellt, und es ist daher Z die Verbindungsmenge von X und Y. Beachtet man noch, daſs gemäſs der obigen Festsetzung $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{c}$ ist, so folgt für die Mächtigkeit von Z die Gleichung

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{c}^2.$$

Die vorstehenden allgemeinen Definitionen von Summe und Product lassen sich, da sie associativer Natur sind, auf jede beliebige endliche Zahl von Mengen ausdehnen und gestatten demnach auch die Erweiterung der vorstehenden Gleichungen auf den ν-dimensionalen Raum C_ν. Bezeichnet also X', X'', $\cdots X^{(\nu)}$ je eine lineare Menge, und Z wieder die Menge aller Punkte des C_ν, so ist

$$Z = (X' \cdot X'' \cdots X^{(\nu)}), \quad \text{resp. } \mathfrak{z} = \mathfrak{c}^\nu.$$

Ebenso ist die Menge R_ν aller rationalen Punkte eines C_ν die Verbindungsmenge von ν Mengen R', R'', $\ldots R^{(\nu)}$, deren jede die Menge der rationalen Punkte auf einer Geraden bedeutet.

5. Auch den Potenzbegriff hat Cantor nebst allen seinen Rechnungsgesetzen auf überendliche Mengen zu übertragen vermocht. Um den Sinn dieses Begriffes verständlicher zu machen, knüpfen wir an ein Theorem der Combinationslehre an, in das die Potenz eingeht, nämlich an den Satz, daſs die Anzahl aller Variationen

1) Math. Ann. 17, S. 355.

von μ Elementen zur ν^{ten} Klasse gleich μ^ν ist, und versuchen, ihn für die Zwecke der Mengenlehre umzuformen. Wir fassen dazu die μ Elemente als eine Menge $M = \{m\}$ auf und fassen zugleich die Menge N der ν Ziffern $1, 2, 3, \cdots \nu$ ins Auge. Alsdann ist die einzelne Variation dadurch bestimmt, dass wir für jede Ziffer von N ein Element von M setzen, oder anders ausgedrückt, dafs wir jedem Element von N ein gewisses Element von M zuordnen. Die einzelne Variation stellt also eine Zuordnung von Elementen von M zu den Elementen von N dar; die Menge P aller μ^ν Variationen ist nichts anderes als die Gesamtheit aller Zuordnungen dieser Art, oder was dasselbe ist, die Gesamtheit aller möglichen Zuordnungsgesetze. Sind jetzt M und N beliebige Mengen, so wollen wir auch für sie die Menge aller möglichen Gesetze ins Auge fassen, die jedem Element von N irgend ein Element von M zuordnen, wir nennen sie Zuordnungsmenge oder mit Cantor Belegungsmenge von N mit M und bezeichnen sie durch

$$P = (N \mid M).$$

Wird jetzt die Potenz durch die Gleichung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$$

definirt, so bleiben für diesen Potenzbegriff alle Rechnungsgesetze in Kraft, wie ebenfalls von Cantor bewiesen ist[1]).

Das einfachste Beispiel einer Belegungsmenge ist die Menge F aller reellen Functionen einer reellen Variablen. Es stelle wieder $X = \{x\}$, ebenso $Y = \{y\}$ die Menge aller reellen Zahlen dar, so wird durch eine einzelne Function den sämtlichen Werten x der Menge X je ein Element der Menge Y zugeordnet; die Function stellt daher ein Zuordnungsgesetz von Y zu X dar. Die Gesamtheit F aller unserer Functionen ist daher wirklich die Belegungsmenge von X mit Y. Da nun $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{c}$ ist, so folgt weiter, dafs

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$$

ist.

Der Begriff der Belegungsmenge tritt auch bei dem Problem auf, eine Menge M in vorgeschriebener Weise in Teilmengen zu spalten und die verschiedenen Teilungsmöglichkeiten zu bestimmen. Sei $M = \{m\}$ die gegebene Menge, die in Teilmengen

$$M_1, M_2, \cdots\cdots M_\nu, \cdots\cdots$$

zu spalten ist, und es sei die Menge dieser Teilmengen von derselben Mächtigkeit, wie die Menge $N = \{n\}$. Es mufs dann jede bei einer

1) Math. Ann. 46, S. 487.

bestimmten Teilung auftretende Teilmenge M' einem Element n' entsprechen und umgekehrt, so daſs z. B. die oben angeführten Mengen den Elementen

$$n_1, n_2, \cdots\cdots n_\nu, \cdots\cdot$$

entsprechen. Die bezügliche Teilung ordnet daher allen Elementen von M_1 das Element n_1, allen Elementen von M_2 das Element n_2 zu u. s. w.; sie stellt also eine Belegung von M mit N dar. Rechnet man nun überdies die Teilungen als verschieden, wenn in sie zwar die nämlichen Teilungen M' eingehen, aber doch so, daſs sie verschiedenen Elementen von N entsprechen[1]), so folgt:

Wird eine Menge M auf alle möglichen Arten in Teilmengen geteilt, deren Menge dieselbe Mächtigkeit besitzt wie eine Menge N, so liefert die Menge aller dieser möglichen Teilungen die Belegungsmenge von M mit N.

Der vorstehende Satz liegt dem Verfahren zu Grunde, mittelst dessen E. Borel die Mächtigkeit $\mathfrak{f}$ der Menge F aller Functionen einer reellen Variablen bestimmt[2]). Er führt diese Aufgabe auf die Bestimmung der Menge F_1 derjenigen Functionen zurück, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen, deren jede also eine Teilung des Continuums in zwei Teilmengen liefert.

6. Wie bereits erwähnt, gestattet der associative Charakter der Definitionen, die für Summe und Product aufgestellt sind, sie auf jede beliebige endliche Zahl von Mengen auszudehnen. Wie steht es aber, falls diese Mengen selbst in überendlicher Menge vorhanden sind? Für die Vereinigungsmenge ist die Ausdehnbarkeit der Definition ohne weiteres klar, sie gilt aber auch für die Verbindungsmenge. Soll ein Product aus einer überendlichen Zahl von Mengen gebildet werden, und sind $M', M'', M''', \cdots$ einige dieser Mengen, so wird jedes Element p der Verbindungsmenge durch eine Elementengruppe $(m', m'', m''', \cdots)$ dargestellt, in die je ein beliebiges Element der Mengen $M', M'', M''', \cdots$ eingeht. Hieraus ziehen wir noch eine weitere Folgerung. Jede Elementengruppe p kann nämlich als ein gewisses Zuordnungsgesetz der Elemente von $M', M'', M''', \ldots$ zu einander angesehen werden. Man schlieſst daraus weiter, daſs auch im Bereich der Mengenlehre die Summe von gleichen Summanden in den Productbegriff, und das Product von gleichen Factoren in den Potenzbegriff übergeht, und zwar auch in dem Fall, daſs die Menge aller Summanden oder Factoren selbst überendlich ist.

---

1) Ist insbesondere N eine endliche Menge, so läſst sich dies auch so aussprechen, daſs die Teilungen als verschieden zu betrachten sind, wenn sie die nämlichen Teilmengen in verschiedener Anordnung enthalten.

2) Leçons etc. S. 124 (1898).

Zweites Capitel.

Die abzählbaren Mengen.

Es ist bereits oben erwähnt worden, dafs die Mengenlehre mit der Einführung des Abzählbarkeitsbegriffes anhebt, insbesondere mit dem Satz, dafs die algebraischen und damit auch die rationalen Zahlen abzählbar sind. Die Frage, ob eine unendliche Menge abzählbar ist oder nicht, ist übrigens keineswegs nur von formaler Wichtigkeit; sowohl im Gebiet der Analysis wie in dem der Geometrie hängt die Eigenart der Probleme und Sätze, in denen unendliche Mengen auftreten, ganz wesentlich davon ab, ob die Mengen abzählbar sind oder nicht. Hier lasse ich nur die allgemeinen Definitionen und Sätze über abzählbare Mengen folgen (1). Es findet sich darunter besonders ein für die Theorie der Punktmengen wichtiger Satz, der die Abzählbarkeit gewisser geometrischer Gebiete nachweist (2), zweitens die Behandlung der Frage, wie oft man in allgemeinster Weise eine abzählbare Menge in abzählbare Teilmengen spalten kann (3).

1. Cantor bezeichnet[1]) eine unendliche Menge $M = \{m\}$ als abzählbar, wenn es möglich ist, ihre Elemente der Reihe der ganzen positiven Zahlen eineindeutig zuzuordnen, so dass sie sich in eine Reihe

$$\{m_\nu\} = m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots m_\nu, \cdots\cdots$$

bringen lassen[2]). Alle abzählbaren Mengen haben daher die gleiche Mächtigkeit, nämlich die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ der Menge der ganzen positiven Zahlen. Dafs sie die einfachsten unendlichen Mengen sind, folgt auch daraus, dass jede unendliche Menge Teilmengen besitzt, die abzählbar sind.

Es leuchtet ein, dass eine abzählbare Menge abzählbar bleibt, wenn man zu ihr eine endliche Menge E hinzufügt; ebenso ist die Vereinigungsmenge zweier abzählbaren Mengen abzählbar, und das gleiche gilt für jede endliche Anzahl abzählbarer Mengen. Diese Sätze finden ihren einfachsten Ausdruck in den entsprechenden Formeln für die bezüglichen Cardinalzahlen, nämlich in den Formeln[3])

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{e} = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \quad \nu\mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

Was an diesen Formeln zunächst in die Augen springt, ist, dafs sie mit allen für endliche Zahlen giltigen Gleichungen in

1) Journ. f. Math. 77, S. 258 (1873).

2) Das Symbol $\{m_\nu\}$ werden wir als Abkürzung für die abzählbare, nach den Indices geordnete Reihe vielfach benutzen.

3) $\mathfrak{e}$ bedeutet die Mächtigkeit der endlichen Menge E, also eine endliche Zahl.

Gegensatz stehen. Dieser Gegensatz ist eine Folge des oben erwähnten Umstandes, dafs bei unendlichen Mengen der Teil gleich dem Ganzen sein kann. Das nämliche wird sich bei den uns des weiteren beschäftigenden Sätzen und Formeln ergeben. Zunächst nenne ich die folgenden:

1) Eine abzählbare Menge von endlichen Mengen ist abzählbar;

2) Eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Der erste von beiden liegt den meisten Beweisen zu Grunde, die die Abzählbarkeit einer Menge zum Ziel haben. Er bedarf kaum der Erörterung; nur ist zu bemerken, dafs, falls $M_1, M_2, M_3, \cdots$ die bezüglichen endlichen Mengen sind, die Menge der in M_ν enthaltenen Elemente mit wachsendem ν über jede Grenze wachsen kann. Der zweite Satz deckt sich damit, dafs auch die Verbindungsmenge abzählbarer Mengen abzählbar ist. Beide Sätze sind bereits in Cantor's ersten Publicationen enthalten[1]).

Der Beweis des zweiten Satzes kann folgendermafsen geführt werden: Wir bezeichnen die einzelnen Mengen durch

$$\begin{aligned} M_1 &= (m_{11}, m_{12}, m_{13}, \cdots\cdot), \\ M_2 &= (m_{21}, m_{22}, m_{23}, \cdots\cdot), \\ M_3 &= (m_{31}, m_{32}, m_{33}, \cdots\cdot), \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

und fassen die Glieder je einer Diagonalreihe, nämlich diejenigen Glieder m_{ik}, für die $i + k = \lambda$ ist, für jeden Wert λ zu einer Menge P_λ zusammen. Jedes so definirte P_λ ist eine endliche Menge, und da nun

$$(M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots) \sim (P_1, P_2, P_3, \cdots\cdot)$$

ist, so ist damit der Satz bewiesen.

Der Inhalt des Satzes deckt sich übrigens mit der einfachen und geläufigen Thatsache, dafs man eine Doppelreihe auch als einfache Reihe schreiben kann[2]). Die sich für die Cardinalzahlen ergebende Formel lautet

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \cdots\cdot = \mathfrak{a}$$

oder auch

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

---

1) Journ. f. Math. 84, S. 243 (1877).

2) Ebenso folgt die Abzählbarkeit aller Glieder $m_{ik \ldots p}$, resp. der Glieder einer vielfachen Reihe. Man bildet die P_λ aus allen Gliedern, in denen die Summe $i + k + \cdots + p$ einen festen Wert λ hat.

Aus dieser Formel folgt durch fortgesetzte Multiplication mit $\mathfrak{a}$, dafs für endliches ν ebenfalls

$$\mathfrak{a}^{\nu} = \mathfrak{a}$$

ist[1]).

2. Die vorstehenden Sätze gestatten bereits eine grofse Zahl von Folgerungen, von denen ich die wichtigeren hier anführe.

I. Alle rationalen Zahlen bilden eine abzählbare Menge[2]). Dies folgt unmittelbar aus dem letzten Satz, wenn wir die rationalen Zahlen durch das Schema

$$\begin{array}{l} \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots \frac{1}{\lambda}, \ldots\ldots \\ \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \ldots\ldots \frac{2}{\mu}, \ldots\ldots \\ \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots \frac{3}{\nu}, \ldots\ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \end{array}$$

darstellen, wo in jedem Bruch Zähler und Nenner ohne gemeinsamen Teiler sind und daher jede rationale Zahl genau einmal vorkommt.

II. Die rationalen Zahlen eines C_ν bilden ebenfalls eine abzählbare Menge R_ν. Sind nämlich

$$R', R'', \cdots\cdots R^{(\nu)}$$

abzählbare Mengen, die je aus der Gesamtheit aller rationalen Zahlen bestehen; so ist R_ν gemäfs S. 7 die Verbindungsmenge von R', R'', $\cdots$ Es ist daher

$$\mathfrak{r}_\nu = \mathfrak{r}' \cdot \mathfrak{r}'' \cdots \mathfrak{r}^{(\nu)} = \mathfrak{a}^{\nu} = \mathfrak{a}.$$

III. Die Menge aller algebraischen Zahlen ist abzählbar.

Diesen Satz, der eines der ersten und wichtigsten Ergebnisse der Mengenlehre darstellt, hat Cantor folgendermafsen bewiesen[3]).

Man betrachte jede algebraische Zahl als Wurzel einer irreduciblen ganzzahligen algebraischen Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n = 0,$$

deren erster Coefficient positiv sein soll, so wird jede algebraische Zahl Wurzel nur einer solchen Gleichung sein. Setzt man nun[4])

$$a_0 + |a_1| + \cdots\cdots + |a_n| + n = \nu,$$

so gehört zu jedem ν eine endliche Anzahl von Wertcombinationen der $|a_i|$ und n, zu jeder Wertcombination eine endliche Zahl von

1) Wenn die Factorenzahl selbst unendlich wird, so gilt die Formel nicht mehr; vgl. S. 23 u. 26.

2) Vgl. den Cantor'schen Beweis im Journ. f. Math. 84, S. 250.

3) Vgl. die Anm. 1 auf S. 10.

4) $|a_i|$ bedeutet in bekannter Weise den absoluten Betrag von a_i.

Gleichungen, und zu jeder Gleichung eine endliche Zahl von algebraischen Zahlen. Die Menge aller auf diese Weise dem ν entsprechenden algebraischen Zahlen sei A_ν. Die Menge A aller algebraischen Zahlen wird daher durch

$$A = \{A_\nu\} = (A_1, A_2, A_3, \cdots A_\nu, \cdots)$$

dargestellt und ist abzählbar. Insbesondere ist also auch die Menge aller reellen algebraischen Zahlen abzählbar, ebenso auch die Menge aller algebraischen Punkte des C_ν.

Ich beweise endlich einen Cantor'schen Satz, der uns in der Theorie der Punktmengen vielfach begegnen wird und als selbstverständliches Postulat vielen Beweisen früherer Zeit zu Grunde liegt. Er lautet:

IV. Jede unendliche Menge G von Gebieten eines stetigen Raumes C_ν, die ganz aufserhalb von einander liegen, oder höchstens an den Grenzen zusammenstofsen, ist abzählbar[1]).

Ist nämlich $a_1 > a_2 > a_3 \cdots$ eine Reihe positiver, unbegrenzt gegen Null abnehmender Zahlen, so sind die Gebietsteile, deren Inhalt zwischen a_ν und $a_{\nu+1}$ liegt, für jedes ν in endlicher Menge G_ν vorhanden. Es ist daher

$$G = (G_1, G_2, \cdots G_\nu, \cdots),$$

womit der Satz bewiesen ist[2]).

Die für den Beweis gemachte Annahme, dass alle Gebietsteile der Menge G endlich sind, ist keine Bedingung des Satzes. Falls sich nämlich gewisse dieser Gebiete ins Unendliche erstrecken, so betrachte man den ν-dimensionalen Raum C_ν als Teil eines $C_{\nu+1}$ und bilde ihn stereographisch auf eine Kugel H_ν des $C_{\nu+1}$ ab; dann geht jedes Gebiet der Menge G in ein endliches auf H_ν liegendes Gebiet über.

3. Da eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen selbst abzählbar ist, so kann man umgekehrt fragen, wie oft man auf allgemeinste Weise eine abzählbare Menge M in abzählbare Teilmengen zerlegen kann. Diese Frage soll hier noch behandelt werden.

Die Menge M möge in die Mengen M' und M_1 zerfallen, die beide unendlich resp. abzählbar sind. Ebenso zerfalle M_1 in zwei unendliche Teilmengen M'' und M_2 u. s. w. Da jede unendliche Menge Teilmengen besitzt, die unendlich sind, so läfst sich dieser Process unendlich oft fortsetzen. Wir gelangen so zu einer Reihe unendlicher Mengen

$$M, M_1, M_2, M_3, \cdots M_\nu \cdots,$$

---

1) Math. Ann. 20, S. 117.

2) Über die dem Beweis zu Grunde liegenden Begriffe des Gebiets und des ihm zugehörigen Inhalts vgl. den vierten Abschnitt.

deren jede eine Teilmenge der vorhergehenden ist. Es entsteht sofort die Frage, ob die Menge M durch die unendlich oft wiederholte Abspaltung von Teilmengen schliefslich erschöpft wird, oder ob man Elemente definiren kann, die allen M_ν gemeinsam sind. Ein Beispiel zeigt, dafs die letzte Frage zu bejahen ist. Sei M die Menge aller rationalen Zahlen zwischen 0 und 1. Aus M entfernen wir die Menge M' aller Brüche, deren Nenner eine Potenz von 2 ist; alsdann werde aus der Restmenge M_1 die Menge M'' aller Brüche entfernt, deren Nenner eine Potenz von 3 ist; aus der Restmenge M_2 entsteht durch Entfernung der Brüche, deren Nenner eine Potenz von 5 ist, die Menge M_3 u. s. w.: so ist klar, dafs es eine wohl definirte Menge giebt, die allen M_ν gemeinsam ist, nämlich die Menge derjenigen Brüche, deren Nenner ein Product verschiedener Primzahlen ist. Wir bezeichnen diese Menge durch M_ω.

Die gleichen Betrachtungen lassen sich anstellen, falls $M = \{m\}$ eine beliebige unendliche Menge ist. Auch in diesem Fall lässt sich eine eventuelle Menge M_ω in aller Form definiren, und zwar gelangen wir dazu auf Grund folgender, in der gesamten Analysis geläufigen und grundlegenden logischen Antithese, dafs es für jedes einzelne Element m entweder eine letzte Menge M_ν giebt, in der es enthalten ist oder nicht, und dafs eine andere Möglichkeit ausgeschlossen ist[1]). Giebt es nun für ein Element m eine solche Menge M_ν nicht, so bildet die Gesamtheit aller dieser Elemente wiederum eine wohldefinirte Menge M_ω. Gemäfs den Festsetzungen auf S. 4 ist übrigens

$$M_\omega = \mathfrak{D}\,(M,\ M_1,\ M_2, \cdots\cdots),$$

worin zugleich die Definition von M_ω enthalten ist[2]).

Nachdem dies festgestellt ist, setze ich endlich noch folgenden, unmittelbar einleuchtenden Satz hierher. Sei $M_0 \sim N_0$, ferner seien

$$M_0,\ M_1,\ M_2, \cdots \text{ resp. } N_0,\ N_1,\ N_2, \cdots$$

zwei Reihen der oben betrachteten Art, und es soll immer M_i und N_i entsprechende Elemente enthalten. Giebt es dann Elemente, die allen M_i gemeinsam sind, so giebt es auch Elemente, die in allen N_i enthalten sind, und es ist $M_\omega \sim N_\omega$.

1) Der obige Satz dürfte dasjenige notwendige und ausreichende Schlufsverfahren enthalten, das allen Betrachtungen und Sätzen über den Grenzbegriff zu Grunde liegt. In der consequenten Ausdehnung seines Wirkungsbereichs liegt eines der Verdienste Cantor's. Vgl. auch Abschnitt II, Cap. 1, sowie Math. Ann. 23 S. 455.

2) Es ist leicht zu sehen, dafs es nicht immer Elemente zu geben braucht, die allen M_i angehören, selbst wenn die M_i in unendlicher Menge existiren. Sei z. B. $M = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \cdots)$, jedoch mit Ausschlufs der Null, $M_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \cdots)$, $M_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8} \cdots)$, so existirt M_ν für jedes endliche ν, und es ist auch $M_{\nu+1}$ Teilmenge von M_ν, es giebt aber keinerlei allen gemeinsames Element.

Drittes Capitel.

Der Gröfsencharakter der Mächtigkeiten.

1. Für zwei endliche Zahlen μ und ν besteht stets eine und nur eine der drei Beziehungen

$$\mu = \nu, \quad \mu > \nu, \quad \mu < \nu;$$

für diese Beziehungen besteht überdies die grundlegende Eigenschaft, dafs, falls $\mu = \nu$ und $\nu = \varrho$ ist, daraus $\mu = \varrho$ folgt, ebenso folgt $\mu > \varrho$ aus $\mu > \nu$ und $\nu > \varrho$. Man sagt deshalb, dafs μ und ν in einer Gröfsenbeziehung stehen. In Verallgemeinerung hiervon soll von einem Gebiet von Dingen $A, B, C, \cdots$ gesagt werden, es besitze Gröfsencharakter, falls es folgende Bedingungen erfüllt. Erstens müssen sich für die $A, B, C, \cdots$ Definitionen des Gleich, Gröfser, Kleiner so aufstellen lassen, dafs das Bestehen der einen die beiden andern ausschliefst; zweitens mufs eine dieser drei Beziehungen für irgend zwei Dinge des Gebiets notwendig realisirt sein; drittens müssen die Definitionen der oben angegebenen grundlegenden Eigenschaft genügen.

Wir stellen nunmehr die Frage, ob die Mächtigkeiten Gröfsencharakter besitzen. Diese Frage zu behandeln ist keineswegs einfach; es stehen ihr Schwierigkeiten entgegen, die sich bisher nicht haben bewältigen lassen, so dafs eine definitive Antwort auf obige Frage im Augenblick noch unmöglich ist. Thatsächlich ist zu bemerken, dass von Cantor in dieser Hinsicht 1895 folgende Definition aufgestellt worden ist.

Stehen zwei Mengen M und N in der Beziehung zu einander, dafs kein Teil von M mit N äquivalent ist, während es einen Teil N_1 von N giebt, der mit M äquivalent ist, so gilt für die Mächtigkeiten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ die Beziehung $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$.

2. Es fragt sich zunächst, inwiefern diese Definition der oben aufgestellten allgemeinen Forderung entspricht. Es seien M und N zwei beliebige Mengen, die auch endlich sein können, und es bezeichne M_1 eine Teilmenge von M, N_1 eine Teilmenge von N, so ist aus logischen Gründen für M und N notwendig eine und nur eine der vier folgenden Beziehungen erfüllt:

a) es giebt ein $M_1 \sim N$, und ein $N_1 \sim M$,
b) es giebt ein $M_1 \sim N$, aber kein $N_1 \sim M$,
c) es giebt kein $M_1 \sim N$, doch ein $N_1 \sim M$,
d) es giebt kein $M_1 \sim N$, und kein $N_1 \sim M$.

Das Bestehen eines dieser vier Fälle schliefst also die drei andern logisch aus. Von diesen Beziehungen deckt sich die durch c) dargestellte mit der obenstehenden Definition Cantor's.

Sind nun zunächst M und N endliche Mengen, so ist von den vier Möglichkeiten die erste niemals realisirt, doch stets eine der letzten drei; und zwar ist, falls die Beziehung b) vorliegt, $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, im Fall c) ist $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, und im Fall d), wie leicht zu sehen, $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$[1]). Sind M und N überendliche Mengen, so liegen die Dinge wesentlich anders. Es giebt Mengen — und wir werden ihnen vielfach begegnen — deren Verhältnis einer der drei ersten Möglichkeiten entspricht; sollen also auch für überendliche Mengen nur drei einander ausschliessende Beziehungen möglich sein, so müfste man zeigen können, dafs für sie die Beziehung d) niemals realisirt ist. Dies ist nun freilich bisher nicht gelungen, und somit fehlt es an dieser Stelle der Theorie an dem nötigen Fundament. Nehmen wir aber einmal an, dafs es sich beweisen liefse, so würden die durch a), b), c) dargestellten Beziehungen vollständig der Eingangs aufgestellten Definition des Gröfsencharakters genügen; es schliefst jede von ihnen die beiden andern logisch aus, es ist (nach Annahme) eine von ihnen immer realisirt; und schliefslich sieht man auch leicht, dafs für sie die grundlegenden Eigenschaften in Geltung sind. Es würden also a), b), c) richtige Definitionen für Gleich, Gröfser, Kleiner abgeben.

Es ist nun sehr bemerkenswert, dafs die vorstehende Folgerung wenigstens in einem Punkt unbedingt zutrifft. Man kann beweisen, dafs zwei Mächtigkeiten gleich sind, wenn der Fall a) besteht. Dies ist praktisch von grofser Wichtigkeit. Für zwei Mengen, deren Äquivalenz in Frage steht, läfst sich nämlich nur selten die Eigenschaft der eineindeutigen Abbildung nachweisen, die in der Definition S. 5 auftritt; dagegen ist es vielfach möglich, den Beweis für die Existenz derjenigen Beziehung zu liefern, die dem Fall a) entspricht. Der bezügliche Satz ist von E. Schröder und F. Bernstein ziemlich gleichzeitig bewiesen worden[2]). Ich lasse eine ausführliche Darlegung hier folgen:

3. Der zu beweisende Satz lautet: Stehen die Mengen M und N in der Beziehung, dafs eine Teilmenge von M äquivalent zu N und eine Teilmenge von N äquivalent zu M ist, so ist auch $M \sim N$.

Sei P_1 die Teilmenge von M, die zu N äquivalent ist, und M_1 die Restmenge, so dafs also

(1) $$M = (M_1, P_1)$$

1) Die in der Theorie der Irrationalzahl auftretende Gleichheitsdefinition, die verlangt, dafs jeder Teil von M in N und jeder Teil von N in M enthalten ist, realisirt ebenfalls die Beziehung d).

2) Der Schröder'sche Beweis ist zuerst erwähnt in den Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. Bd. V, S. 81 (1896). Er beruht auf Anwendung des Logikcalcüls. Vgl. auch Nova Acta Leop. Bd. 71, S. 303 (1898). Der von F. Bernstein herrührende Beweis, der mit dem obigen im wesentlichen identisch ist, wurde zuerst in Borel's Leçons sur la théorie des fonctions mitgeteilt, S. 103 ff.

zu setzen ist, und analog sei

(2) $$N = (N_1, Q_1),$$

so dafs also

$$P_1 \sim N \text{ und } Q_1 \sim M$$

ist. Wegen $P_1 \sim N$ giebt es eine eineindeutige Abbildung von N auf P_1; dabei mögen den Teilmengen N_1 und Q_1 von N die Teilmengen M_2 und P_2 von P_1 entsprechen, so dafs

(3) $$P_1 = (M_2, P_2), \quad M_2 \sim N_1, \quad P_2 \sim Q_1$$

ist und überdies

(4) $$M = (M_1, P_1) = (M_1, M_2, P_2)$$

wird. Aus $P_2 \sim Q_1$ und $Q_1 \sim M$ folgt weiter $P_2 \sim M$; wir dürfen also gemäfs Gl. (1) setzen:

$$P_2 = (M_3, P_3) \text{ für } M_3 \sim M_1, \ P_3 \sim P_1.$$

Hieraus folgt nun weiter

$$M = (M_1, M_2, M_3, P_3).$$

So können wir fortfahren. Nun ist weiter zu beachten, dafs P_2 Teilmenge von P_1, ebenso P_3 Teilmenge von P_2 ist u. s. w.; wir gelangen daher schliefslich zu einer Darstellung

(5) $$M = (M_1, M_2, M_3, \cdots, P_\omega),$$

wo die Menge P_ω, falls es überhaupt eine solche Menge giebt, diejenigen Elemente enthält, die allen Mengen $P_1, P_2, P_3, \cdots$ gemeinsam sind.

In gleicher Weise erhalten wir eine Zerlegung von N, indem wir von der Äquivalenz $Q_1 \sim M$ ausgehen. Bei der Abbildung von M auf Q_1 mögen den Teilmengen M_1 und P_1 von M die Teilmengen N_2 und Q_2 von Q_1 entsprechen, so dafs

$$Q_1 = (N_2, Q_2), \quad N_2 \sim M_1, \quad Q_2 \sim P_1$$

ist. Alsdann folgt wieder

$$N = (N_1, Q_1) = (N_1, N_2, Q_2).$$

Analog erhalten wir aus $Q_2 \sim P_1 \sim N$, wie oben,

(6) $$N = (N_1, N_2, N_3, Q_3)$$

und schliefslich

(7) $$N = (N_1, N_2, N_3, \cdots\cdots, Q_\omega),$$

wo wieder Q_ω, falls es existirt, die allen $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ gemeinsamen Elemente bedeutet. Nun folgt aber aus unseren Bezeichnungen unmittelbar, dafs

$$M_1 \sim N_2 \sim M_3 \sim N_4 \cdots\cdots, \ N_1 \sim M_2 \sim N_3 \sim M_4 \cdots \text{ und}$$
$$Q_1 \sim P_2 \sim Q_3 \sim P_4 \cdots\cdots, \ P_1 \sim Q_2 \sim P_3 \sim Q_4 \cdots\cdots$$

ist; gemäfs dem Ende von Cap. 2 ist also auch die allen $P_1, P_2, P_3, \cdots$ gemeinsame Menge P_ω der in allen $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ enthaltenen Teilmenge Q_ω äquivalent, und daraus folgt schliefslich

$$(8) \qquad M \sim N.$$

Der Beweis beruht erstens darauf, dafs, von welcher Mächtigkeit auch die Mengen M und N sein mögen, das Beweisverfahren doch nach einer abzählbaren Menge von Schritten zum Ziele führt; er beruht zweitens auf der Möglichkeit der S. 14 eingeführten Menge M_ω. Diese Menge bildet eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Mengenlehre.

4. Im vorigen Paragraphen hatte sich herausgestellt, dafs auf Gleichungen zwischen Mächtigkeiten die gewöhnlichen Rechnungsgesetze angewendet werden können. Für Ungleichungen ist dies, was hier ausdrücklich hervorgehoben werden mag, nicht mehr ohne weiteres der Fall. So kann aus den beiden Gleichungen[1])

$$\mathfrak{c} > \mathfrak{e} \text{ und } \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

nicht etwa durch Multiplication geschlossen werden, dafs $\mathfrak{c}\mathfrak{c}$ gröfser als $\mathfrak{e}\mathfrak{c}$ ist, vielmehr ist $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{e}\mathfrak{c}$. Die Anwendbarkeit der Rechnungsregeln versagt also hier. Dies ist jedoch keineswegs ein Widerspruch. Es beruht darauf, dafs das Verhältnis der Teilmengen zu einander, von dem die Gröfsenbeziehung abhängt, bei Combination von Ungleichungen einen Wechsel erleiden kann, bei Combination von Gleichungen dagegen nicht.

Viertes Capitel.

Die einfachsten nicht abzählbaren Mengen.

Bereits 1873 gelangte Cantor zu dem Resultat, dafs das Linearcontinuum, d. h. die Gesamtheit aller endlichen Zahlen, nicht abzählbar ist (1). Damit war zum ersten Mal die Erkenntnis begründet, dafs man im Gebiet der überendlichen Mengen mit verschiedenen Mächtigkeiten zu rechnen hat.

Cantor überzeugte sich alsbald, dafs auch das mehrdimensionale Continuum C_ν, sowie sogar das Continuum C_a von abzählbar unendlich vielen Dimensionen die gleiche Mächtigkeit besitzt, wie das lineare (2). Eine obere Grenze für die Mächtigkeit irgend einer in einem beliebigen Raum gelegenen Punktmenge war damit erkannt, denn sie konnte höchstens die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des linearen Continuums besitzen. Es blieb aber die Frage offen, ob es noch andere Punktmengen geben kann, als die abzählbaren und diejenigen der Mächtig-

1) $\mathfrak{e}$ bedeutet die Mächtigkeit einer endlichen Menge. Die Richtigkeit der obigen Behauptung erhellt aus S. 22.

keit $\mathfrak{c}$, d. h. also solche, deren Mächtigkeit zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ fällt. Cantor hat von vornherein der Überzeugung Ausdruck gegeben, dafs diese Frage zu verneinen sei. Bereits 1877 äufserte er[1]), durch ein Inductionsverfahren zu diesem Ergebnis gelangt zu sein; es gebe nur zwei Klassen von Punktmengen, von denen die eine die Form functio ipsius ν habe, wo ν alle ganzen Zahlen bedeute, die andere die Form functio ipsius x, wo x alle Punkte eines Intervalls darstelle. Er ist auf diese Frage immer wieder zurückgekommen, ohne dafs jedoch bisher ein Beweis seiner Behauptung gelungen wäre[2]).

Dagegen hat man inzwischen Mengen kennen gelernt, deren Mächtigkeit gröfser ist als $\mathfrak{c}$; die einfachste ist die Mächtigkeit aller Functionen einer oder mehrerer Variablen (4). Cantor hat sogar gezeigt, wie man Mengen von unbegrenzt zunehmender Mächtigkeit definiren kann, so dafs sich zu jeder Mächtigkeit Mengen noch höherer Mächtigkeit definiren lassen (5).

1. Um zu zeigen, dafs das Linearcontinuum nicht abzählbar ist, stelle ich zunächst folgende einfache Überlegung voran. Es werde angenommen, eine Zahlenmenge $M = \{m\}$ sei abzählbar, also darstellbar in der Form

$$\{m_\nu\} = m_1,\ m_2,\ m_3, \cdots\cdots m_\nu \cdots;$$

ferner möge $m_\varkappa$, m_λ, m_μ, $\cdots$ eine Fundamentalreihe sein, die ein Grenzelement m' bestimmt, das der Menge angehört. Wenn dann m' von jedem m_ϱ verschieden ist, so ist dies ein Widerspruch gegen die Annahme, die Menge sei abzählbar.

Auf Grund dieser evidenten Thatsache läfst sich das Cantor'sche Beweisverfahren folgendermafsen darstellen. Angenommen, das in einem Intervall δ gelegene Continuum $X = \{x\}$ sei abzählbar, also darstellbar in der Form

$$(1) \qquad \{x_\nu\} = x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots\cdots x_\nu, \cdots\cdots,$$

so zeigen wir, dafs in jedem Teilintervall $p \cdots q$ von δ Punkte existiren, die in der Reihe 1) nicht vorkommen. Dies geschieht, wie folgt.

Unter allen Punkten x_ν, die innerhalb $p \cdots q$ liegen, wählen wir die ersten beiden, d. h. diejenigen mit den kleinsten Indices aus; sie seien $x_\varkappa = p_1$ und $x_\varrho = q_1$, wo $p_1 < q_1$ sei, im übrigen aber $p \overline{\overline{<}} p_1$ und $q \overline{\overline{>}} q_1$ ist. Alle anderen in das Intervall $p \cdots q$ fallenden Punkte x_ν haben dann sicher Indices, die gröfser als $\varkappa$ und ϱ sind. Wir suchen unter ihnen wieder die ersten beiden Punkte, die in das Intervall $p_1 \cdots q_1$ fallen; sie seien $x_\lambda = q_2$ und $x_\sigma = p_2$,

1) Journ. f. Math. 84, S. 258.
2) Vgl. insbesondere Math. Ann. 21, S. 574 und 23, S. 488.

so daſs also $\lambda > \varkappa$ und $\sigma > \varrho$ ist, und es sei wieder $p_2 < q_2$. Dieses Verfahren läſst sich unbegrenzt fortsetzen. Da nämlich die Reihe $\{x_\nu\}$ alle Punkte von δ enthalten soll, so giebt es in ihr stets Punkte, die innerhalb eines jeden Intervalls $p_i \cdots q_i$ fallen. Wir erhalten so zwei Fundamentalreihen:

$$p < x_\varkappa < x_\lambda < \cdots \quad \text{resp.} \quad q > x_\varrho > x_\sigma > \cdots,$$

deren Indices dem Bildungsgesetz gemäſs unbegrenzt wachsen, so daſs zugleich $\varkappa < \lambda < \cdots$ und $\varrho < \sigma < \cdots$ ist.

Die durch die Fundamentalreihen dargestellten Zahlen[1]) p' und q' gehören nun einerseits dem Continuum der Punkte von δ an, andererseits können sie aber in der Menge $\{x_\nu\}$ nicht enthalten sein. Denn nimmt man an, daſs z. B. $p' = x_\nu$ wäre, so müſste x_ν innerhalb jedes Intervalls $p_i \cdots q_i$ fallen und daher ν gröſser sein als alle Indices $\varkappa, \lambda, \cdots$ resp. $\varrho, \sigma, \cdots$, was nicht möglich ist. Damit ist der Satz bewiesen; d. h.

I. Die Menge C aller Zahlen eines gegebenen Intervalls ist nicht abzählbar.

Der hier dargestellte Beweis ist im wesentlichen der nämliche, den Cantor bei der ersten Veröffentlichung seines Satzes gegeben hat[2]). Er ist überdies ein typischer Vertreter eines Beweisverfahrens, dem wir im Gebiet der Mengenlehre meistens begegnen werden, wenn es sich darum handelt zu zeigen, daſs gewisse Mengen nicht abzählbar sind.

Ein zweiter Beweis, der ebenfalls von Cantor stammt, ist der folgende[3]).

Wären die Zahlen des Intervalls $0 \cdot\cdot 1$ abzählbar, so sei

$$\{a_\nu\} = a_1,\ a_2,\ a_3 \cdots\cdot a_\nu \cdots\cdot$$

die bezügliche Anordnung. Ferner seien diese Zahlen in Decimalbruchdarstellung

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} \cdots\cdot, \\ a_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} \cdots\cdot, \\ a_3 &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} \cdots\cdot, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

Nun bilde man eine Zahl

$$b = 0, b_1 b_2 b_3 \cdots\cdot,$$

so daſs $b_\nu \gtrless a_{\nu\nu}$ ist, so ist b von jedem a_i verschieden, da es in mindestens einer Ziffer von a_i abweicht, also kann b in der obigen Reihe nicht enthalten sein.

---

1) Es ist für den Beweis belanglos, ob $p' < q'$ oder $p' = q'$ ist.
2) Journ. f. Math. 77, S. 260. Vgl. auch Math. Ann. 15, S. 5.
3) Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. I, S. 77.

Die Mächtigkeit der Zahlen des Linearcontinuums ist augenscheinlich für alle Intervalle die gleiche, wir bezeichnen sie durch $\mathfrak{c}$. Sie erfüllt die in Cap. 3 angegebenen Bedingungen, denen gemäfs $\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$ zu bezeichnen ist.

2. Es giebt eine grofse Reihe von Zahlmengen, die ebenfalls die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen. Hierüber lasse ich zunächst einige Sätze allgemeineren Inhaltes folgen.

II. Die Menge aller Irrationalzahlen, ebenso die Menge aller transcendenten Zahlen eines gegebenen Intervalls δ besitzt die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Ist zunächst J die Menge der irrationalen Zahlen, und $\mathfrak{i}$ ihre Mächtigkeit, so ist, da die Rationalzahlen des Intervalls die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ haben,

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \mathfrak{a}.$$

Man zerlege nun J durch Abspalten irgend einer abzählbaren Menge A_1 in die Mengen A_1 und J_1, so wird

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{a},$$

und hieraus folgt durch beiderseitige Addition von $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{i} + \mathfrak{a} = \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{a}$$

oder aber, da $\mathfrak{i} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ ist,

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{a} = \mathfrak{i}.$$

In derselben Weise ergiebt sich der Satz für die transcendenten Zahlen; statt der Rationalzahlen mit der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ hat man die algebraischen Zahlen zu benutzen, die ebenfalls die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ besitzen[1]).

Der vorstehende rechnerische Beweis kann auch leicht in eine solche Form gesetzt werden, dafs man unmittelbar sieht, in welcher Weise die Mengen J und C zur Äquivalenz gebracht werden. Man zerlege wieder J in J_1 und A_1, so dafs sich

$$C = (J, R) = (J_1, A_1, R)$$

ergiebt. Da nun $A_1 = (A_2, A_3)$ gesetzt werden kann, wo A_2 und A_3 beides abzählbare Mengen sind, so ist

$$J = (J_1, A_1) = (J_1, A_2, A_3)$$

und daher

$$J \sim C.$$

Der vorstehende Beweis zeigt übrigens noch, dafs die Mächtigkeit von C sich nicht ändert, falls man eine abzählbare Menge tilgt

1) Dafs es überhaupt transcendente Zahlen giebt, wurde zuerst von Liouville bewiesen. Journ. de Math. 16, S. 133 (1851).

oder hinzufügt; d. h. es ist

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c} \text{ und } \mathfrak{c} - \mathfrak{a} = \mathfrak{c}\ ^{1}).$$

3. Da man auf der unendlichen Geraden eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Teilstrecken unterbringen kann, so folgt zunächst, dafs

$$\nu\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \text{ und } \mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

ist. Damit sind aber die Mengen der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ noch keineswegs erschöpft. Es besteht der Satz:

III. Das Continuum C_ν des ν-dimensionalen Raumes hat ebenfalls die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Von diesem Satze sind viele Beweise gegeben worden. Ich teile hier zunächst den ersten Cantor'schen Beweis mit[2]), der an die Darstellung einer Irrationalzahl durch einen unendlichen Kettenbruch anknüpft und die eineindeutige Beziehung zwischen C_1 und C_ν wirklich herstellt. Ich erinnere zunächst daran, dafs gemäfs S. 7 für die Mächtigkeit $\mathfrak{c}_\nu$ des ν-dimensionalen Continuums die Gleichung besteht

$$\mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{c}' \cdot \mathfrak{c}'' \cdots \mathfrak{c}^{(\nu)} = \mathfrak{c}^\nu,$$

wo $\mathfrak{c}', \mathfrak{c}'', \cdots \mathfrak{c}^{(\nu)}$ je eine lineare Mächtigkeit bedeuten. Nun sei x irgend ein irrationaler Wert im Intervall $0 \cdots 1$, so läfst er sich in einen unendlichen Kettenbruch

$$x = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} \cdots = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots]$$

entwickeln. Wir setzen nun

$$x_1 = [\alpha_1, \alpha_{\nu+1}, \alpha_{2\nu+1} \cdots],$$
$$x_2 = [\alpha_2, \alpha_{\nu+2}, \alpha_{2\nu+2} \cdots],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_\nu = [\alpha_\nu, \alpha_{2\nu}, \alpha_{3\nu} \cdots\cdots],$$

so entspricht jedem x eine Combination $(x_1, x_2, \cdots x_\nu)$, aber auch umgekehrt jeder solchen Combination ein Wert x. Die beiden Mengen

$$\{x\} \text{ und } \{(x_1, x_2, \cdots x_\nu)\}$$

sind also äquivalent. Setzen wir jetzt noch $X_\lambda = \{x_\lambda\}$, so folgt gemäfs S. 7, dafs

$$X = (X_1 . X_2 \cdots X_\nu),$$

also

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{x}_2 \cdots \mathfrak{x}_\nu$$

1) Der gleiche Satz gilt für jede Menge, deren Mächtigkeit gröfser als $\mathfrak{a}$ ist. Vgl. auch Cantor in Journ. f. Math. 84, S. 254.

2) Journ. f. Math. 84, S. 245.

ist. Da nun jedes x alle irrationalen Werte zwischen 0 und 1 annimmt, so sind alle $\mathfrak{x}_\lambda = \mathfrak{c}$, und es folgt

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^\nu = \mathfrak{c}_\nu.$$

Eine zweite Beweismethode des Satzes knüpft an die näherliegende Decimalbruchdarstellung an. Wird zunächst

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots; \quad \alpha_i < 10$$

gesetzt, so liegt es nahe, in der nämlichen Weise wie im vorstehenden Beweis die Gröfsen $x_1, x_2 \cdots x_\nu$, resp. die Mengen $X_1, X_2 \cdots X_\nu$ einzuführen; doch dies scheitert zunächst an dem Umstand, dafs unter den α_i Nullen in unbegrenzter Menge auftreten können, wodurch die x_λ rational ausfallen. Würde man aber nicht blofs die irrationalen, sondern auch rationale Zahlenwerte x resp. x_λ in Betracht ziehen, so würde damit die Eineindeutigkeit der Beziehung verloren gehen, weil ein rationales x eine doppelte Zifferndarstellung durch einen Decimalbruch zulassen kann. Man kann diesem Übelstand aber leicht begegnen. Erstens setze man fest, dafs man nur mit solchen Zifferndarstellungen von x resp. x_λ operirt, die unendlich viele von Null verschiedene Ziffern enthalten; und zweitens denke man sich die eventuellen Nullen mit der ersten auf sie folgenden Ziffer zu je einer Gruppe verbunden und dehne das Abbildungsgesetz auf diese Zahlengruppen aus[1]).

An die Decimalbruchdarstellung knüpft auch folgendes ebenfalls von Cantor herrührende Beweisverfahren an[2]). Der unendliche Decimalbruch x ist dadurch bestimmt, dafs jeder seiner unendlich vielen Stellen eine der Ziffern 0, 1, 2, $\cdots$ 9 zugewiesen wird; er stellt also eine Belegung der Menge aller ganzen Zahlen mit der Menge der vorstehenden Ziffern dar. Das gleiche gilt, falls die Basis des Zahlsystems nicht 10 sondern irgend eine andere endliche ganze Zahl ist. Die Menge C der Zahlen zwischen 0 und 1 kann daher als Belegungsmenge einer abzählbaren Menge mit einer endlichen Menge angesehen werden; d. h. es ist

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{e}^{\mathfrak{a}}.$$

Daraus folgt nun sofort

$$\mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{c}^\nu = \mathfrak{e}^{\nu \mathfrak{a}} = \mathfrak{e}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c},$$

und man schliefst sogar weiter, falls man die Mächtigkeit des Continuums von abzählbar unendlich vielen Dimensionen mit $\mathfrak{c}_\mathfrak{a}$ bezeichnet,

$$\mathfrak{c}_\mathfrak{a} = \mathfrak{c}^\mathfrak{a} = \mathfrak{e}^{\mathfrak{a}\mathfrak{a}} = \mathfrak{e}^\mathfrak{a} = \mathfrak{c}; \quad \text{d. h.:}$$

1) Dieser Gedanke rührt von J. König her.
2) Math. Ann. 46, S. 488 (1895).

IV. Auch das Continuum von abzählbar unendlich vielen Dimensionen hat nur die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$[1]**.**

Um die Abbildung zwischen dem C_1 und dem $C_\mathfrak{a}$ wirklich herzustellen, kann man folgendermaſsen verfahren: Es sei — wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die Werte zwischen 0 und 1 —

$$x' = 0, a_1' a_2' a_3' \cdots, \quad x'' = 0, a_1'' a_2'' a_3'' \cdots, \quad x''' = 0, a_1''' a_2''' a_3''' \cdots,$$

ein Punkt des $C_\mathfrak{a}$, so erhält man daraus den Punkt x von C, indem man die Gesamtheit aller $a_x^{(i)}$ in derselben Weise in eine Reihe bringt wie auf S. 11. Die wirkliche Zuordnung beruht also darauf, daſs eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen selbst abzählbar ist, also ebenfalls auf der Formel $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

Auch die Menge aller rationalen Zahlen des $C_\mathfrak{a}$ hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, wie man auf analoge Weise zeigen kann.

Ausdrücklich bemerke ich noch, daſs alle die vorstehend erörterten eineindeutigen Beziehungen zwischen C und C_ν resp. $C_\mathfrak{a}$ ohne Ausnahme von der Stetigkeit abstrahiren. **Für die Mächtigkeitsfragen kommt die Stetigkeit nicht in Betracht.**

Ich füge endlich die Bemerkung an, daſs es vielfach nützlich ist, die Zahlen des Continuums in einem dyadischen Zahlsystem auszudrücken. Jede Zahl z zwischen 0 und 1 hat alsdann die Form

$$z = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots; \quad a_i = 0 \text{ oder } 1$$

und man kann, um jede dieser Zahlen genau einmal zu erhalten, festsetzen, daſs in jedem der vorstehenden Dualbrüche die Ziffer 1 unendlich oft auftritt. Man kann aber auch die Menge $Z = \{z\}$ aller Folgen ins Auge fassen, die durch z dargestellt werden; es wird durch sie eine abzählbare Menge von Zahlen zwischen 0 und 1 doppelt dargestellt, und es ist gemäſs S. 22 $\mathfrak{z} = \mathfrak{c} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.

4. Die einfachste uns bekannte Menge, deren Mächtigkeit gröſser als $\mathfrak{c}$ ist, ist die Menge F aller Functionen einer reellen Variablen.

Das für den Beweis anzuwendende Verfahren ist eine Verallgemeinerung des oben gegebenen zweiten Beweises, daſs $\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$ ist. Gemäſs S. 8 ist F die Belegungsmenge von C mit sich selbst, so daſs für ihre Mächtigkeit $\mathfrak{f}$ die Gleichung

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{c}^\mathfrak{c}$$

besteht. Um nun zu zeigen, daſs $\mathfrak{f} > \mathfrak{c}$ ist, ist nachzuweisen, daſs zwar eine Teilmenge F_1 von F existirt, so daſs $F_1 \sim C$ ist, daſs aber keine Teilmenge von C mit F äquivalent ist. Eine Teilmenge $F_1 \sim C$ läſst sich leicht angeben, sie wird von allen Functionen gebildet, deren Wert constant ist. Gäbe es dagegen eine Teilmenge

1) Auch diesen Satz gab Cantor bereits 1877 im Journ. f. Math. 84, 256.

C' von F, so dafs $C' \sim F$ ist, so müfste jedem Element von C' ein Element von F, d. h. eine bestimmte Function $f(x)$ entsprechen und umgekehrt. Es entspreche insbesondere das Element c_1 der Function $f_1(x)$. Diese Function ordnet jedem Zahlenwert x einen Wert von C zu, und zwar möge dies für $x = c_1$ der Wert c' sein. Wir bestimmen nun eine Function $f(x)$ dadurch, dafs in ihr diesem Wert $x = c_1$ nicht c', sondern ein anderer Wert von C zugeordnet werden solle, und dafs das analoge für jeden Wert von x der Fall sei, so ist diese Function notwendig von allen eben betrachteten verschieden und kann daher keinem Element c entsprechen. Es ist also

$$\mathfrak{f} > \mathfrak{c}; \text{ d. h.:}$$

V. Die Mächtigkeit $\mathfrak{f}$ aller Functionen einer reellen Variabeln ist gröfser als $\mathfrak{c}$.

Auch die Menge F_ν aller Functionen von ν reellen Variablen hat nur die Mächtigkeit $\mathfrak{f}$; denn es ist F_ν die Belegungsmenge von C_ν mit C, und daher

$$\mathfrak{f}_\nu = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}^\nu} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{f}.$$

Dagegen giebt es Functionsklassen allgemeiner Art, die die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen, insbesondere gilt der Satz[1]):

VI. Die Mächtigkeit aller stetigen, resp. aller analytischen Functionen einer Variablen ist gleich $\mathfrak{c}$.

Eine stetige Function ist nämlich bestimmt, falls ihre Werte an allen rationalen Stellen bekannt sind[2]), sie ist also eine Belegung der Menge R aller rationalen Zahlen mit C. Ist F_1 die bezügliche Belegungsmenge, so folgt

$$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}.$$

Die Menge F_1 enthält nun noch andere Functionen, als nur die stetigen; bezeichnen wir die stetigen Functionen mit F_s, die übrigen mit F_u, so wird

$$\mathfrak{f}_s + \mathfrak{f}_u = \mathfrak{c}.$$

Andererseits giebt es in F_s eine Teilmenge F_2, die C äquivalent ist, nämlich diejenigen Functionen, die für alle Werte der Variablen constant sind; d. h. es ist auch

$$\mathfrak{f}_s = \mathfrak{c} + \mathfrak{f}_2,$$

und daher folgt aus beiden Gleichungen[3])

$$\mathfrak{f}_s = \mathfrak{c}.$$

---

1) Diesen Satz hat Cantor zuerst in Band 21 der Math. Ann. S. 590 ausgesprochen. Für die wirkliche Herstellung einer Abbildung aller stetigen Functionen auf das Continuum vgl. auch Abschnitt III, Cap. I, 4, Anm.

2) Vgl. hierzu Abschnitt III, Cap. I, 3.

3) Diese Art, zu folgern, entspricht dem Satz, dafs Mengen äquivalent sind, falls jede einer Teilmenge der andern äquivalent ist. Um ein typisches Beispiel zu geben, habe ich den Beweis ausführlich dargestellt.

Auf ganz ähnlichen Schlüssen beruht der Beweis für die analytischen Functionen, man kann jede von ihnen durch eine Potenzreihe resp. durch die Werte ihrer Coefficienten definiren. Diese Coefficientenwerte fassen wir am einfachsten als Darstellung eines Punktes des C_a auf. Die Gesamtheit aller so bestimmten Potenzreihen, die übrigens im allgemeinen nicht convergiren, bildet daher eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, in der die analytischen Functionen als Teilmenge enthalten sind; ebenso giebt es wieder eine Teilmenge der analytischen Functionen, die die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt[1]).

Endlich ist klar, dafs auch die stetigen resp. die analytischen Functionen beliebig vieler Variablen nur die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen; man findet bei Borel[2]) eine eineindeutige Beziehung zwischen den Potenzreihen einer und zweier Variablen wirklich hergestellt.

5. Der Satz, dafs die Menge F aller Functionen als Belegungsmenge von C mit C höhere Mächtigkeit hat als C selbst, läfst sich verallgemeinern[3]) und führt zu folgendem Theorem:

VII. Ist M eine überendliche Menge, so liefert die Belegung von M mit M selbst eine Menge, die höhere Mächtigkeit besitzt, als M.

Sei G die Belegungsmenge von $M = \{m\}$ mit M, oder wie wir im Interesse der Deutlichkeit lieber sagen, von M mit M'. Sie besteht aus allen Gesetzen g, die je einem Element m je ein Element m' zuordnen. Es giebt nun zunächst wieder eine Teilmenge G_1 von G, so dafs $G_1 \sim M$ ist, sie wird von denjenigen Gesetzen g gebildet, die allen m das nämliche m' zuordnen. Gäbe es nun wieder eine Teilmenge $M_1 \sim G$, so müfsten alle Zuordnungsgesetze g den Elementen m eineindeutig entsprechen. Bei der bezüglichen eineindeutigen Beziehung möge dem Element m_1 das Gesetz g_1 entsprechen, und es sei insbesondere m_1' das Element von M', das durch das Gesetz g_1 dem Element m_1 zugeordnet wird. Alsdann kann man wieder ein Zuordnungsgesetz g in der Weise definiren, dafs es dem Element m_1 ein von m_1' verschiedenes Element von M' zuordnet, und dafs das analoge für jedes Element m gilt. Dieses Gesetz ist von allen denen verschieden, die den Elementen m entsprechend gesetzt sind, es kann also auch G nicht mit M_1 äquivalent sein. Es folgt also

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}.$$

1) Der Beweis beruht auf der Gleichung, dafs $\mathfrak{c}^{a} = \mathfrak{c}$ ist. Zugleich folgt hieraus, dafs jede Functionsklasse, die in ähnlicher Weise durch abzählbar unendlich viele Bedingungen definirbar ist, die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt. Borel, Leçons etc. S. 126. Vgl. auch Verhandl. d. math. Congr. Zürich, S. 201—205.

2) Leçons etc. S. 127.

3) Vgl. Cantor, Berichte d. Deutschen Math.-Ver., I, S. 77.

Zeigt so das vorstehende eine unbegrenzte Reihe stets wachsender transfiniter Mächtigkeiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$, ..., so entsteht von selbst die bereits oben gestreifte Frage, ob das zweite Glied dieser Reihe auch wirklich die zweitgröfste Mächtigkeit darstellt, oder ob es — was an sich möglich ist — Mächtigkeiten giebt, die der Gröfse nach zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ fallen. Wir sahen, dafs Cantor von vorn herein geneigt war, diese Frage zu verneinen, dafs jedoch die Wissenschaft eine Antwort auf sie bisher nicht erteilt hat. Wir können sogar kaum sagen, dafs wir ihr irgendwie erheblich näher gekommen seien. Der einzige Fortschritt, den die Frage gemacht hat, ist der, dafs man inzwischen wenigstens eine bestimmte Menge als zweite Mächtigkeit zu definiren gelernt hat. Dies wird in Cap. VII näher erörtert werden.

Fünftes Capitel.

Die geordneten Mengen und die Ordnungstypen.

Wir haben im 1. Capitel die Begriffe Menge, Ordnung, Abbildung als diejenigen genannt, die den arithmetischen Definitionen zu Grunde liegen. Die Begriffe Menge und Abbildung haben uns zur Cardinalzahl und zu den Gröfsenbeziehungen geführt, es bleibt noch übrig, den Ordnungsbegriff ebenfalls für die unendlichen Mengen zu benutzen.

Die auf der Anordnung beruhenden Fundamentalbegriffe finden sich teilweise schon in den „Grundlagen", sowie in der Zeitschrift für Philosophie dargestellt; sie haben durch Cantor's spätere Arbeiten wesentlich nur eine präcisere Einführung erfahren. Der Fortschritt von den Grundlagen zu Cantor's späteren Veröffentlichungen liegt grofsenteils auf dem Gebiet systematischer Darstellung.

Im Gebiet der endlichen Mengen führt die geordnete Menge zum Anzahlbegriffe[1]); genauer ist es die Ordinalzahl, die auf diese Weise entsteht. In logischer Hinsicht sind Ordinalzahl und Cardinalzahl auch bei endlichen Mengen verschieden; doch fällt dort praktisch dieser Unterschied nicht ins Gewicht. Bei transfiniten Mengen dagegen liegen die Dinge durchaus anders.

Die Elemente einer unendlichen Menge $M = \{m\}$ lassen sich stets auf die mannigfachste Weise anordnen, selbst wenn man von der verschiedenen Beschaffenheit der Elemente absieht und sie alle als gleichartig betrachtet. Man kann z. B. die Menge R der rationalen Zahlen nach der Gröfse anordnen, oder auch so, dafs sie eine abzählbare Menge bilden, wie es oben S. 2 angedeutet ist. Das Gesetz dieser Anordnung ist in beiden Fällen wesentlich verschieden. Im ersten Fall steht zwischen irgend zwei rationalen Zahlen noch

1) Vgl. z. B. Dedekind, Was sind u. s. w., S. 20 u. 54.

eine unendliche Menge anderer Zahlen, im zweiten jedoch immer nur eine endliche Anzahl, und man kann noch beliebig viele andere Ordnungsgesetze für die Menge R aufstellen[1]). Bei endlichen Mengen dagegen giebt es nur ein derartiges Ordnungsgesetz, es mufs ein Element notwendig das erste, eines das zweite sein u. s. w. und schliefslich eines das letzte.

Die Ordnungsgesetze unendlicher Mengen sind es, die Cantor als weitestgehende Verallgemeinerung des Ordinalzahlbegriffes erkannt und unter dem Namen Ordnungstypen in den Calcul eingeführt hat. Die Zweckmäfsigkeit dieser Einführung beruht darauf, dafs auch auf die Ordnungstypen die Rechnungsoperationen und die associativen Rechnungsgesetze ausgedehnt werden können; die commutativen werden naturgemäfs illusorisch, da ja der Begriff des Ordnungstypus auf der Anordnung beruht!

Wichtiger noch ist es, und hierin besteht das Hauptergebnis dieses Teils der Mengenlehre, dafs in den Eigenschaften der Ordnungstypen auch solche Begriffe ihren allgemeinsten arithmetischen Ausdruck finden, die wir gewöhnlich als eine besondere Eigenschaft der stetigen Zahlenmenge zu betrachten gewohnt sind. Es ist dies in erster Linie derjenige Begriff, auf dem die Theorie der Irrationalzahl beruht, nämlich der Begriff des Grenzelements, ferner aber auch alle diejenigen, die bei den Punktmengen auftreten und ihre Verteilung im Raum betreffen; alles Begriffe, von denen man leicht annehmen mag, dafs nicht allein der stetige Raum ihre Quelle ist, sondern dafs auch ihre Geltung nicht über ihn hinausreicht.

1. Eine Menge soll geordnet, oder genauer einfach geordnet heifsen, falls ein Gesetz besteht, das für irgend zwei Elemente m und m' angiebt, welches dem andern vorangeht; wir schreiben

$$m \prec m' \text{ resp. } m \succ m',$$

je nachdem m dem m' vorangeht oder umgekehrt. Enthält die Menge ein Element, das jedem andern vorangeht, so heifst es das erste Element, ebenso heifst ein Element, das jedem andern folgt, das letzte. Ein erstes oder letztes Element braucht jedoch nicht vorhanden zu sein, wie z. B. bei der Menge aller positiven und negativen der Gröfse nach geordneten ganzen Zahlen.

Sind M und N äquivalente Mengen, und ist M geordnet, so läfst sich N dementsprechend ordnen, nämlich so, dafs, falls $m \prec m'$ ist, für die entsprechenden Elemente n und n' auch $n \prec n'$ ist. M und N heifsen in diesem Fall ähnlich geordnete oder kurz

1) Ich setze noch einige Ordnungsgesetze der Menge der ganzen positiven Zahlen hierher

a) 1 2 3 4 ....; b) .... 4 3 2 1; c) 1 3 5 .... 2 4 6 ....;
d) 1 3 5 .... 6 4 2; u. s. w. u. s. w.

ähnliche Mengen. Ähnliche Mengen weisen also das nämliche Ordnungsgesetz auf. Diese Ordnungsgesetze sind, wie bereits erwähnt, die Cantor'schen Ordnungstypen; ein Ordnungstypus stellt also das gemeinsame Ordnungsgesetz äquivalenter ähnlicher Mengen dar; oder nach Cantor:

Der Ordnungstypus oder Typus von M ist der Allgemeinbegriff, der sich ergiebt, wenn man von der Beschaffenheit der Elemente abstrahirt, die Rangordnung unter ihnen aber beibehält. Wir bezeichnen ihn durch $\overline{M}$, resp. durch μ, und bezeichnen die zugehörige Mächtigkeit auch durch $\overline{\mu}$, so dafs $\mathfrak{m} = \overline{\mu} = \overline{\overline{M}}$ ist.

Den einfachsten Ordnungstypus einer unendlichen Menge liefert dasjenige Ordnungsgesetz, das den der Gröfse nach geordneten ganzen positiven Zahlen zukommt resp. jeder Menge

$$\{m_\nu\} = m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots m_\nu \cdots\cdots,$$

in der die m_ν beliebige Elemente sind. Diesen Ordnungstypus bezeichnet Cantor durch ω; den zu ihm inversen durch $^*\omega$[1]). Der Ordnungstypus ω kommt auch jeder unendlichen Teilmenge von $\{m_\nu\}$ zu, in der die Rangbeziehungen erhalten bleiben, wie z. B. den Mengen

$$(m_1, m_3, m_5 \cdots\cdots) \quad \text{resp.} \quad (m_\nu, m_{\nu+1}, m_{\nu+2} \cdots\cdots);$$

eine Menge kann also auch einer ihrer Teilmengen ähnlich sein.

Eine endliche Menge hat, wie bereits oben erwähnt, nur einen Ordnungstypus; jede einfach geordnete Menge von ν Elementen stellt sich in der Form

$$(e_1, e_2, e_3 \cdots\cdots e_\nu)$$

dar. Wir bezeichnen ihn durch ν, wo unter ν, wie das folgende ergeben wird, die bezügliche endliche Zahl zu verstehen ist[2]).

2. Aus zwei geordneten Mengen M und N bilden wir zunächst eine geordnete Vereinigungsmenge Q, deren Ordnungsgesetz so lautet, dafs jedes m jedem n vorangeht, während für die Elemente von M resp. N die bezüglichen Ordnungsgesetze in Kraft bleiben. Alsdann definiren wir den Ordnungstypus $\varkappa$ von Q durch die Gleichung

$$\varkappa = \mu + \nu$$

als Summe von μ und ν. Ist z. B. M eine Menge vom Typus ω,

---

1) Es ist also

$$\omega = \overline{(m_1, m_2 \cdots m_\nu \cdots)}, \quad ^*\omega = \overline{(\cdots m_\nu \cdots m_2, m_1)}$$

zu setzen; die Bezeichnung entspricht dem, dafs allgemein $\mu = \overline{M}$ ist. Den Ordnungstypus $^*\omega$ besitzt z. B. die Menge b) in Anm. 1 von S. 28.

2) Vgl. die Anmerkung 1 auf S. 30.

also $M = \{m_\nu\}$, $N = (e_1, e_2, \cdots e_\lambda)$ eine endliche Menge, und bilden wir aus ihnen die geordneten Mengen

$$Q_1 = (M, N) = (m_1, m_2, m_3, \cdots m_\nu, \cdots, e_1, e_2, \cdots e_\lambda),$$
$$Q_2 = (N, M) = (e_1, e_2, \cdots e_\lambda, m_1, m_2, \cdots m_\nu, \cdots),$$

so daſs in Q_1 alle Elemente von M allen Elementen von N vorangehen, in Q_2 die Elemente von N denen von M, so sind die bezüglichen Ordnungstypen[1])

$$\varkappa_1 = \lambda + \omega, \; \varkappa_2 = \omega + \lambda.$$

Der Ordnungstypus der Menge Q_1 ist augenscheinlich gleich ω, es ist also $\lambda + \omega = \omega$, während hingegen $\omega + \lambda$ einen von ω verschiedenen Typus darstellt[2]). Das Beispiel zeigt auch, daſs die Summe von Ordnungstypen dem commutativen Gesetz nicht genügt, während sie das associative Gesetz befriedigt.

3. Um zur **Multiplication** der Ordnungstypen zu gelangen, bilden wir aus den geordneten Mengen M und N eine Verbindungsmenge S in der Weise, daſs wir jedes Element n durch eine geordnete Menge M_n ersetzen, die mit M ähnlich ist, und zwar so, daſs $M_n \prec M_{n'}$, falls $n \prec n'$ ist. Der Ordnungstypus σ von S kann daher auch dahin bestimmt werden, daſs er durch Einsetzen von μ in ν entsteht, wir bezeichnen ihn als **Product** von μ in ν gemäſs der Gleichung

$$\sigma = \mu . \nu.$$

Für diesen Productbegriff besteht ebenfalls das associative, jedoch nicht das commutative Gesetz, ferner das distributive, falls der Multiplicandus ν eine Summe ist.

Beispielsweise ergiebt sich $2 . \omega$, indem für jedes Element von ω zwei Elemente gesetzt werden; es ist also

$$2 \cdot \omega = \overline{(m_1, n_1, m_2, n_2, m_3, n_3, \cdots\cdots)},$$

während dagegen

$$\omega \cdot 2 = \overline{(m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots; \; n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots)}$$

ist. Man sieht leicht, daſs

$$2 \cdot \omega = \omega, \text{ aber } \omega \cdot 2 = \omega + \omega$$

ist. Analog erhält man $\omega . \omega$, indem für jedes Element m_i von

1) Wird also der Ordnungstypus von $(e_1, e_2 \cdots e_\nu)$ durch ν, der von (e) durch 1 bezeichnet, so ist der Ordnungstypus von $(e_1, e_2 \cdots e_\nu, e)$ durch $\nu + 1$ dargestellt. Hierin findet das Wesen der Ordinalzahlen ν resp. $\nu + 1$ seinen eigentlichen Ausdruck.

2) Den in Anm. 1 S. 28 stehenden Mengen *c*) und *d*) entsprechen die Ordnungstypen $\omega + \omega$, resp. $\omega + {}^*\omega$.

$\omega = \overline{(m_1, m_2, m_3, \cdots)}$ selbst eine Menge vom Typus ω gesetzt wird; d. h.

$$\omega \cdot \omega = \overline{(m_{11}, m_{12}, m_{13}, \cdots; m_{21}, m_{22}, m_{23}, \cdots; m_{31}, m_{32}, m_{33}, \cdots\cdots)}$$

und es ist also

$$\omega \cdot \omega = \omega + \omega + \omega + \cdots;$$

setzt man endlich für jedes m_{ik} wieder eine Menge vom Typus ω, so erhält man den Typus $\omega \cdot \omega \cdot \omega \cdot$ u. s. w. u. s. w.[1])

4. Um für die geordneten Mengen diejenigen Begriffe abzuleiten, die, wie bereits oben erwähnt, für die Theorie der Irrationalzahl und der Punktmengen grundlegend sind, verfährt Cantor folgendermaſsen:

Ist M eine geordnete Menge, so soll jede in ihr enthaltene Teilmenge vom Typus ω eine steigende Fundamentalreihe heiſsen; sie hat die Form $\{a_\nu\}$, wo $a_\nu \prec a_{\nu+1}$ ist. Ebenso heiſst eine in M etwa enthaltene Teilmenge vom Typus $^*\omega$ eine fallende Fundamentalreihe; sie soll durch $\{b_\nu\}$ dargestellt werden, wo $b_\nu \succ b_{\nu+1}$ ist. Existirt ferner in M ein Element a_ω, das zu einer Fundamentalreihe $\{a_\nu\}$ die Beziehung hat, daſs $a_\nu \prec a_\omega$ für jedes ν, und daſs für jedes $m \prec a_\omega$ stets ein Index ν_0 existirt, so daſs, wenn $\nu > \nu_0$ ist, auch $a_\nu \succ m$ ist, so soll a_ω Grenzelement von $\{a_\nu\}$ und zugleich Hauptelement von M heiſsen. Analog heiſst b_ω Hauptelement von M resp. Grenzelement von $\{b_\nu\}$, falls $b_\nu \succ b_\omega$ für jedes ν, und für jedes $m \succ b_\omega$ stets ν_0 so existirt, daſs $b_\nu \prec m$, falls $\nu > \nu_0$ ist[2]). Diese Definitionen sind in der That das genaue Analogon derer, auf denen die Theorie der Irrationalzahl ruht. Man kann dann noch Kriterien aufstellen, wann zwei Fundamentalreihen das nämliche Hauptelement bestimmen, u. s. w.; alles Dinge, die in den Sätzen über die Irrationalzahl ihr Äquivalent besitzen.

Sind jetzt M und M' ähnliche Mengen, so entspricht einer Fundamentalreihe $\{a_\nu\}$ der einen Menge eine Fundamentalreihe $\{a_\nu'\}$ der andern und umgekehrt, ebenso einem Grenzelement oder Hauptelement der einen ein solches der andern. Die vorstehende Definition der Fundamentalreihe, resp. des Grenzelements gilt daher auch für die durch die Mengen bestimmten Ordnungstypen. Diese Begriffe sind also in der That kein ausschlieſsliches Attribut der stetig ausgedehnten Gebilde. Der innere Grund ist der, daſs sie, wenn sie

---

1) Für $\omega . \omega$ kann man auch ω^2 schreiben, ebenso ω^3 für $\omega . \omega . \omega$; vgl. S. 48.

2) Ein Element kann sowohl linksseitiges, wie rechtsseitiges Grenzelement sein, oder aber nur einseitiges. Hierauf beruhende speciellere Begriffsbestimmungen sind besonders von Peano und seinen Schülern durchgeführt worden.

auch für das Gebiet der stetigen Gröfsen erdacht sind, doch ihrer formalen Beschaffenheit nach durchaus am discreten hängen[1]).

Mit dem Begriff der Fundamentalreihe lassen sich aber auch die weiteren, auf ihr beruhenden formalen Begriffe, die man gewöhnlich als Eigenschaften des stetigen Zahlencontinuums zu betrachten pflegt, auf die Ordnungstypen übertragen. Dies gilt namentlich von denen, die Cantor für die Charakterisirung der Punktmengen eingeführt hat. So soll eine geordnete Menge, resp. ein Ordnungstypus abgeschlossen heifsen, falls jede seiner Fundamentalreihen ein Grenzelement besitzt; er heifst in sich dicht, falls jedes Element ein Hauptelement ist; er heifst endlich perfect, falls er sowohl in sich dicht, als auch abgeschlossen ist. Von einer Menge, deren Ordnungstypus perfect ist, gilt der Satz, dafs sie nicht abzählbar ist. Er ist eine Verallgemeinerung des bezüglichen Satzes über das Zahlencontinuum, das der Gröfse nach geordnet, eine perfecte Menge darstellt, und wird ebenso bewiesen, wie dieser.

Wir können auf die Ordnungstypen sogar den Begriff des Intervalls ausdehnen, indem wir irgend zwei Elementen m' und m'' nebst allen Elementen, die zwischen ihnen enthalten sind, als Elemente eines Intervalls auffassen; m' und m'' sind die Endelemente dieses Intervalls, während jedes zwischen ihnen gelegene Element ein inneres Element ist. Es lassen sich deshalb auch die Begriffe überall dicht und nirgends dicht auf die Ordnungstypen übertragen. Von einem Ordnungstypus, der überall dicht ist, gilt, wie leicht ersichtlich ist, der Satz, dafs er auch in sich dicht ist, während das umgekehrte nicht immer der Fall zu sein braucht.

Näher auf diese abstracten Beziehungen einzugehen, scheint nicht erforderlich; es sollte hauptsächlich gezeigt werden, dafs alle die obigen Begriffe nicht von dem Vorhandensein eines stetigen Raumes abhängen, sondern auf formal arithmetischem Boden erwachsen. Sie legen zugleich Zeugnis dafür ab, dafs in dem Ordnungstypus derjenige Fundamentalbegriff zu erblicken ist, an dem die formalen Gesetze von Arithmetik und Geometrie ihren gemeinsamen Ausdruck finden.

5. Die wichtigsten Ordnungstypen unendlicher Mengen sind diejenigen der Menge R aller rationalen, resp. der Menge C aller reellen Zahlen, falls sie der Gröfse nach geordnet werden. Den Ordnungstypus der Menge R aller rationalen Zahlen hat Cantor so definirt, dafs er die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ besitzt, weder ein erstes noch ein letztes Element besitzt und überall dicht ist. Er hat überdies die Eigenschaft, dafs er in sich dicht ist. Der Ordnungstypus λ des der Gröfse nach geordneten Linearcontinuums L ist perfect, und

1) Vgl. hierzu auch Cap. I des dritten Abschnitts.

enthält eine Menge R der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ so, dafs zwischen je zweien seiner Elemente Elemente von R dem Range nach liegen. Dafs dies die richtigen Definitionen sind, folgt daraus, dafs man jede Menge der vorstehend genannten Typen auf R resp. L abbilden kann; ebenso haben natürlich alle Mengen, die aus dem Linearcontinuum durch solche ein-eindeutige Abbildung entstehen, die die Gröfsenverhältnisse bestehen läfst, den Typus λ, mag diese Abbildung stetig sein oder nicht[1]).

6. Im Interesse der Vollständigkeit erwähne ich, dafs Cantor auch für mehrfach geordnete Mengen Ordnungsgesetze resp. Ordnungstypen mathematisch definirt und in Untersuchung gezogen hat. Eine Menge heifst mehrfach geordnet, wenn für jedes Element mehrere Merkmale vorhanden sind, die sein Rangverhältnis bestimmen; wie z. B. die Coordinaten für die Punkte eines C_ν[2]); ihr Ordnungsgesetz ist wieder ihr Ordnungstypus. Derartige Ordnungstypen sind jedoch bisher nur für endliche Mengen behandelt worden, die in diesem Falle nicht blofs einen, wohl aber eine endliche Anzahl von verschiedenen Ordnungstypen besitzen. Insbesondere hat Cantor Recursionsformeln angegeben, um die Anzahl der Ordnungstypen einer r-fach geordneten Menge zu bestimmen[3]).

Die Ordnungstypen der transfiniten mehrfach geordneten Mengen sind bisher nicht weiter untersucht worden. Es ist jedoch klar, dafs sich auf sie die Definitionen der Fundamentalreihe, des Grenzelements, und der an sie anschliefsenden Begriffe, nämlich abgeschlossen, in sich dicht, perfect, überall dicht und nirgends dicht, ebenfalls übertragen lassen. Es kommen in den bezüglichen Formulirungen wieder diejenigen Tatsachen und Beziehungen zum allgemeinsten arithmetischen Ausdruck, die für die Punkte einer stetig ausgedehnten Menge längst geläufig sind.

Sechstes Capitel.

Die wohlgeordneten Mengen und die Ordnungszahlen.

Von den geordneten Mengen sind die wichtigsten die wohlgeordneten; ihre Ordnungstypen liefern die transfiniten Ordnungszahlen, ebenso wie die Mächtigkeiten die transfiniten Cardinalzahlen lieferten.

---

1) Vgl. auch Abschnitt III, Cap. 2. Die einfachste nichtstetige Abbildung dieser Art erhält man, wenn man die obige Menge $Z = \{z\}$ (S. 24) nicht dyadisch liest, sondern in irgend einem andern Zahlensystem, z. B. dekadisch. Vgl. auch S. 64.

2) Die Töne lassen sich, falls für sie Höhe und Stärke berücksichtigt wird, als zweifach geordnete Menge darstellen.

3) Vgl. Zeitschr. f. Philosophie, Bd. 92, S. 240. Analoge Probleme behandeln H. Schwarz (Dissertation Halle, 1888), sowie Vivanti in Ann. di mat. (2), Bd. 17, S. 1.

Die Theorie der wohlgeordneten Mengen hat Cantor 1897 dargestellt[1]); in ihr hat er die logisch geklärte und verallgemeinerte Grundlage für die von ihm bereits 1882 eingeführten transfiniten Zahlen geschaffen. Er geht von der Auffassung aus, die endliche Zahl ν durch eine Reihe aufeinanderfolgender Einheiten darzustellen — $\nu = \{1, 1, 1, \ldots . 1\}$ — und jede Zahl $\nu' < \nu$ durch einen Abschnitt dieser Reihe. Die Verallgemeinerung dieser Auffassung liefert den Begriff und die Eigenschaften der transfiniten Zahlen. Diese Zahlen bezwecken die Fortsetzung der Reihe der ganzen Zahlen über das Unendliche hinaus. So paradox eine solche Idee zunächst erscheint, so lassen doch bereits die vorangehenden Entwicklungen die Natur und die Notwendigkeit dieser Fortsetzung erkennen.

1. Ein formales Bedürfnis für diejenigen Symbole, die man transfinite Zahlen nennt, läfst sich an ganz einfachen Problemen darlegen. Ich wähle ein solches, das an die Natur des Grenzpunktes in einem stetigen Gebiet anknüpft. Auf der Einheitsstrecke bedeute

$$x_0, \; x_1, \; x_2, \; \cdots\cdot \; x_\nu, \; \cdots\cdot$$

eine Reihe von Punkten, die von links nach rechts auf einander folgen, und es sei x_ω ihr Grenzpunkt. Ist dies ein innerer Punkt der Strecke $0 \cdots 1$, so fasse man von ihm aus wieder eine Reihe von links nach rechts liegender Punkte ins Auge; sie möge durch

$$x_\omega, \; x_{\omega+1}, \; x_{\omega+2}, \; \cdots\cdot \; x_{\omega+\nu} \cdots\cdot$$

bezeichnet werden, und es sei $x_{\omega+\omega} = x_{\omega\cdot 2}$ ihr Grenzpunkt. So kann man fortfahren; eine analoge Reihe führe zu einem Grenzpunkt $x_{\omega\cdot 3}$ u. s. w. u. s. w. Die Punkte, zu denen man so gelangt, können überdies so gewählt werden, dafs auch die Grenzpunkte

$$x_\omega, \; x_{\omega\cdot 2}, \; x_{\omega\cdot 3}, \; \cdots\cdot \; x_{\omega\cdot\mu}, \; \cdots\cdot$$

selbst noch gegen einen inneren Punkt der Einheitsstrecke convergiren, den man alsdann durch $x_{\omega\cdot\omega} = x_{\omega^2}$ bezeichnen kann. Von ihm aus kann man immer wieder weitere Punkte ins Auge fassen, bis man schliefslich den Punkt $x = 1$ erreichen wird[2]).

Das Vorstehende hat zu einer in unbegrenzter Perspective fortschreitenden Reihe von Indicessymbolen geführt, die wir hier nochmals durch eine Tabelle darstellen:

---

1) Math. Ann. 49, S. 207. Die hier auftretenden Begriffe und Sätze finden sich gröfstenteils schon in Math. Ann. 21, S. 545 ff. dargelegt. Vgl. auch Zeitschrift f. Philosophie, 92, S. 240 (1887).

2) Es ist eine stillschweigende Voraussetzung mancher Beweise, dafs dies letztere wirklich einmal eintritt, wie auch die Punkte x gewählt werden mögen. Genau genommen bedarf aber diese Voraussetzung der Prüfung, besonders die nötige Zahl der Schritte. Vgl. auch Cap. VII, § 5.

$$\begin{array}{lllll} & 1, & 2, \cdots\cdots & \nu, \cdots\cdots \\ \omega, & \omega+1, & \omega+2, \cdots\cdots & \omega+\nu, \cdots\cdots \\ \omega\cdot 2, & \omega\cdot 2+1, & \omega\cdot 2+2, \cdots\cdots & \omega\cdot 2+\nu, \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\ \omega\cdot\mu, & \omega\cdot\mu+1, & \omega\cdot\mu+2, \cdots\cdots & \omega\cdot\mu+\nu, \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\ \omega^2, & \omega^2+1, \cdots \omega^2+\omega\cdot\mu+\nu, \cdots \omega^3, \cdots\cdots & & \end{array}$$

u. s. w. u. s. w.

Diese Symbole sind Cantor's transfinite Zahlen.

Es möge hier noch ein zweites Beispiel eine Stelle finden, das an die früher (S. 14) eingeführte Menge M_ω anknüpft. Sind die Mengen

$$M_1,\; M_2,\; M_3 \cdots\cdot M_\nu \cdots\cdot$$

so beschaffen, dafs jedes M_{i+1} in M_i enthalten ist, so läfst sich eine Menge M_ω definiren, die in allen M_i enthalten ist, so dafs

$$M_\omega = \mathfrak{D}\,(M_1,\; M_2,\; \cdots\cdot\; M_\nu \cdots\cdot)$$

ist. Man kann nun aber von neuem Teilmengen von M_ω betrachten und so zu der Reihe der Teilmengen

$$M_{\omega+1},\; M_{\omega+2},\; \cdots\cdots$$

gelangen[1]). Es kann dann wieder eine allen diesen Mengen gemeinsame Teilmenge

$$\mathfrak{D}\,(M_\omega,\; M_{\omega+1},\; M_{\omega+2} \cdots\cdots) = M_{\omega\cdot 2}$$

geben, und es lassen sich nun auch für sie weitere Teilmengen definiren, u. s. w. u. s. w.

2. Der wirkliche Ausgangspunkt Cantor's bei der Construction der transfiniten Zahlen ist freilich kein so formaler; es ist die Theorie der Punktmengen, die den Anstofs dazu gegeben hat. Bei den Punktmengen treten die Mengen M_ω, $M_{\omega+1}$, $\cdots$, die wir hier als constructiv möglich erkannten, wirklich auf; sie sind es, die die Einführung der transfiniten Zahlen als Notwendigkeit erscheinen liefsen. Cantor hat diese Zahlen ursprünglich durch gewisse Erzeugungsprincipien hergestellt analog dem obigen Beispiel. Erst viel später (1897) hat er eine allgemeine Theorie dieser Zahlen aufgestellt und sie so auf Definitionen allgemeinster Art gestützt, dafs sie jede Art transfiniter Zahlen umfafst und jede

1) Es scheint hier natürlicher, die bezüglichen Mengen durch M_∞, $M_{\infty+1}$, $M_{\infty+2} \cdots\cdot$ zu bezeichnen. Dies ist auch wirklich die Bezeichnung, die Cantor zunächst gewählt hat (Math. Ann., 17, S. 358, 1880). Der Fortschritt von diesen Symbolen zu mathematischen Objecten ist dasjenige, was durch die Theorie der wohlgeordneten Mengen geleistet wird.

Art von Erzeugungsprincipien zuläſst, die zur Construction dieser Zahlen erforderlich sind. Diese Theorie soll hier zunächst zur Darstellung kommen.

Eine Menge F heiſst wohlgeordnet, falls sie, sowie jede ihrer Teilmengen, ein erstes Element besitzt.

Hier entsteht sofort die Frage, ob und wie man zu solchen Mengen von der Definition aus gelangen kann. Zu diesem Behuf weise ich zunächst auf drei Folgerungen hin, die sich aus der Definition unmittelbar ergeben.

1) Jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist selbst wohlgeordnet.

2) Zu jedem Element f von F, falls es nicht das letzte ist, giebt es ein unmittelbar folgendes (consecutives) Element. Ist nämlich F_1 die Teilmenge aller Elemente, die auf f folgen ($F_1 \succ f$), so hat sie notwendig ein erstes Element, und dies ist das geforderte[1]).

3) In F giebt es keine Reihe von Elementen $f \succ f' \succ f'' \cdots$, die nicht abbricht; denn sonst würde sie eine Teilmenge ohne erstes Element darstellen. In einer unendlichen wohlgeordneten Menge giebt es also keine Teilmengen vom Typus $^*\omega$.

Dagegen enthält, wie noch gezeigt wird, jede transfinite wohlgeordnete Menge Teilmengen vom Typus ω.

Die wirkliche Construction der wohlgeordneten Mengen, die wir hier zunächst in Angriff nehmen, wird das überraschende Resultat ergeben, daſs es in gewissem Sinn nur eine Gattung wohlgeordneter Mengen giebt, und daſs sich jede als „Abschnitt“ eines sie alle enthaltenden einheitlichen Ganzen auffassen läſst. Es entspricht dies dem oben erwähnten Umstand, daſs sich ν' als Abschnitt von ν betrachten läſst, falls $\nu' < \nu$ ist.

3. Unter dem bereits eben erwähnten Abschnitt einer wohlgeordneten Menge F soll die wohlgeordnete Menge A aller Elemente verstanden werden, die einem Element f vorangehen ($A \prec f$); genauer heiſst A der durch f bestimmte Abschnitt. Die wohlgeordnete Menge aller Elemente von F, die auf A folgen, heiſst der durch f bestimmte Rest von F, so daſs also

$$F = (A, R); \; A \prec R$$

ist. Diese von Cantor in die Theorie eingeführten Abschnitte sind geeignet, die Einsicht in den Bau der wohlgeordneten Mengen wesentlich zu erleichtern; sie bilden zugleich ein ebenso einfaches, wie nützliches Hilfsmittel der hier zu führenden Beweise. Zunächst ist klar, daſs nicht allein jedem Element f ein Abschnitt A ent-

1) Bei der Menge R der der Gröſse nach geordneten rationalen Zahlen folgt auf eine Zahl r niemals eine andere unmittelbar.

spricht, sondern auch umgekehrt jedem Abschnitt ein Element f, nämlich das erste Element des zu A gehörigen Restes R. Für diese Abschnitte bestehen insbesondere folgende Sätze, von denen wir öfters Gebrauch zu machen haben:

1) Ist A ein Abschnitt von F und A' ein Abschnitt von A, so ist auch A' Abschnitt von F.

2) Sind A und A' zwei Abschnitte derselben Menge F, und definirt man $A > A'$, falls $f > f'$ ist, so besitzen die Abschnitte von F Gröfsencharakter (S. 15). Insbesondere ist stets $F > A$.

3) Die der Gröfse nach geordneten Abschnitte von F bilden eine wohlgeordnete Menge, die der Menge F ähnlich ist, und zwar so, dafs A und f einander entsprechen.

4) Für jede Teilmenge von Abschnitten giebt es notwendig einen kleinsten.

5) Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs F und G ähnliche Mengen sind, besteht darin, dafs jedem Abschnitt der einen Menge ein ihm ähnlicher Abschnitt der anderen Menge entspricht und umgekehrt.

Von diesen Sätzen bedarf höchstens der zweite Teil des letzten einer kurzen Erörterung. Entspricht nämlich jedem A von F ein ihm ähnlicher Abschnitt B von G, so entspricht auch jedem f ein g; sind ferner A, A' und B, B' entsprechende Abschnitte, und ist $A < A'$, so ist auch $B < B'$; es ist also, falls $f \prec f'$ ist, auch $g \prec g'$, womit der Satz bewiesen ist.

4. Um jetzt die wohlgeordneten Mengen wirklich aufzustellen, verfahren wir folgendermafsen. Wir nennen zwei Elemente f und f_1 von F **benachbart** oder **getrennt**, je nachdem zwischen ihnen eine endliche oder überendliche Menge anderer Elemente vorhanden ist, und bestimmen zunächst diejenigen wohlgeordneten Mengen F, die kein Element enthalten, das vom ersten Element f_1 getrennt ist. Enthält alsdann die Menge F ein letztes Element, so enthält sie nur eine endliche Anzahl von Elementen und ist vom Typus

$$\nu = \overline{(f_1, f_2, \cdots f_\nu)};$$

enthält sie dagegen kein letztes Element, so ist sie notwendig vom Typus

$$\omega = \overline{(f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots)}.$$

Für jedes ν ist die erste Menge in der zweiten als Abschnitt enthalten.

Sind zweitens in F Elemente enthalten, die von f_1 getrennt sind, so bilden sie eine Teilmenge G, die notwendig ein erstes Element g_1 enthält, und es ist

$$F = (F_1, G).$$

Hier ist die Menge F_1 so definirt, dafs sie kein Element enthalten

kann, das von f_1 getrennt ist; sie ist daher eine Menge, wie wir sie eben betrachteten, und zwar notwendig eine solche vom Typus ω. Wir haben also

$$\varphi = \omega + \chi,$$

wenn φ resp. χ die Ordnungstypen von F und G sind. Für G sind jetzt wieder, wie oben für F, zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn zunächst die Menge G keinerlei von g_1 getrenntes Element enthält, so hat sie wieder den Typus

$$\mu = \overline{(g_1, g_2, \cdots g_\mu)} \quad \text{oder} \quad \omega = \overline{(g_1, g_2, g_3 \cdots\cdot)},$$

je nachdem sie ein letztes Element enthält oder nicht, und wir erhalten daher für F den Typus

$$\varphi = \overline{(f_1, f_2, f_3, \cdots; g_1, g_2, \cdots g_\mu)} = \omega + \mu \quad \text{resp.}$$
$$\varphi = \overline{(f_1, f_2, f_3 \cdots; g_1, g_2, g_3, \cdots\cdot)} = \omega + \omega = \omega \cdot 2.$$

Enthält G dagegen Elemente, die von g_1 getrennt sind, so bilden sie eine Teilmenge H, die ein erstes Element h_1 besitzt, und für die sich im übrigen dieselben Schlüsse ausführen lassen, wie eben für F und G. Wir gelangen so zu einer fortlaufenden Reihe von Ordnungstypen, die wieder die auf S. 35 enthaltene Tabelle liefern, und es ist nach der Ableitung klar, dafs eine wohlgeordnete Menge entweder selbst vom Typus $\omega \cdot \mu + \nu$ ist oder aber Abschnitte dieses Typus besitzt.

Das vorstehende Verfahren zur Bildung wohlgeordneter Mengen kann man in allgemeiner Weise fortsetzen; zunächst wie folgt: Sei

$$F' = (f_{11}, f_{21}, f_{31} \cdots\cdot)$$

eine Teilmenge von F, die folgendermafsen definirt ist. Es sei f_{11} das erste Element von F, f_{21} das erste, das von f_{11} getrennt ist, f_{31} das erste, das von f_{21} getrennt ist u. s. w. Da nun F' ebenfalls eine wohlgeordnete Menge ist, so ist nach dem obigen resp.

$$\varphi' = \nu, \quad \varphi' = \omega, \quad \varphi' = \omega + \chi',$$

und man überzeugt sich leicht, dafs im ersten Fall F einen Typus besitzt, der bereits unter denen der obigen Tabelle enthalten ist. Ist zweitens $\varphi' = \omega$, so haben wir

$$F = (f_{11}, f_{12}, f_{13}, \cdots; \quad f_{21}, f_{22}, f_{23}, \cdots; \quad f_{31}, f_{32} \cdots\cdot; \quad \cdots\cdot),$$

so dafs

$$\varphi = \omega + \omega + \omega + \cdots\cdots\cdot = \omega \cdot \omega = \omega^2$$

ist; endlich ergiebt sich im dritten Fall, falls zunächst $\chi' = \mu$ ist,

$$\varphi = \omega^2 + \omega \cdot \mu + \nu$$

u. s. w. u. s. w.[1])

1) Die obenstehenden Mengen und ihre Ordnungstypen geben einfache Beispiele für die Ungiltigkeit des commutativen Gesetzes; man sieht z. B. aus der Definition von ω^2, dafs $\omega + \omega^2 = \omega^2$ ist, während $\omega^2 + \omega$ von ω^2 verschieden ist, u. s. w.



5. Aus alledem folgt, dafs zwei wohlgeordnete Mengen F und F_1 jedenfalls im Anfang in ihrem Bildungsgesetz übereinstimmen; sie besitzen eine Reihe ähnlicher Abschnitte und können sich insoweit nur in der Bezeichnung unterscheiden. Es entsteht daher die Frage, ob diese Übereinstimmung des Bildungsgesetzes einmal aufhört. Die Antwort lautet, dafs dies nur dann eintritt, wenn eine der Mengen selbst aufhört; soweit man auch zwei wohlgeordnete Mengen ins Auge fafst, haben sie das gleiche Bildungsgesetz. Mit andern Worten, es besteht der Satz:

I. Zwei wohlgeordnete Mengen F und G sind entweder ähnlich, oder die eine ist einem Abschnitt der andern ähnlich.

Dieser Satz steht im Mittelpunkt der Theorie und soll daher ausführlich bewiesen werden.

Da es für F und G jedenfalls Abschnitte giebt, die einander ähnlich sind, so können zwischen ihnen nur folgende zwei Möglichkeiten obwalten. Entweder entspricht jedem Abschnitt der einen Menge ein ihm ähnlicher Abschnitt der andern, oder nicht jedem Abschnitt der einen entspricht ein ihm ähnlicher Abschnitt der andern. Im ersten Fall sind die Mengen ähnlich, es bleibt also nur der zweite zu betrachten. Er spaltet sich in zwei Unterfälle. Es kann noch jedem Abschnitt der einen Menge ein ihm ähnlicher der andern entsprechen, aber nicht umgekehrt, oder aber es hat keine der beiden Mengen die Eigenschaft, dafs jedem ihrer Abschnitte ein ähnlicher der andern entspricht.

Wenn zunächst jedem Abschnitt A von F ein ihm ähnlicher Abschnitt B von G entspricht, aber nicht umgekehrt, so giebt es gemäfs S. 37, 4 einen kleinsten Abschnitt G' von G, dem in F kein ähnlicher Abschnitt entspricht. Ist nun B' ein Abschnitt von G', so ist B' auch Abschnitt von G, und da $B' < G'$ ist, so entspricht dem B' ein ähnlicher Abschnitt in F. Andererseits entspricht auch jedem Abschnitt A von F ein Abschnitt B von G; dieser mufs aber zugleich Abschnitt von G' sein, d. h. $B < G'$. Denn wäre $B \geqq G'$, so müfste auch dem G' ein ähnlicher Abschnitt in F entsprechen, was ja nicht der Fall ist. Die beiden Mengen F und G' stehen also in der Beziehung, dafs jedem Abschnitt der einen ein ihm ähnlicher Abschnitt der andern entspricht; d. h. es ist $F \sim G'$.

Wird zweitens angenommen, dafs weder jedem Abschnitt von F ein solcher von G, noch auch jedem Abschnitt von G ein solcher von F entspricht, so giebt es in F sicher einen kleinsten Abschnitt F', dem kein Abschnitt in G entspricht, und in G einen kleinsten Abschnitt G', dem kein Abschnitt in F entspricht. Nun sei wieder A' ein Abschnitt von F', so ist auch A' Abschnitt von F, und da $A' < F'$, so entspricht ihm sicher ein ähnlicher Abschnitt B

in G, und man zeigt, wie eben, daſs $B < G'$, also auch ein Abschnitt von G' ist. Ebenso folgt, daſs jedem Abschnitt B' von G' ein ihm ähnlicher Abschnitt von F' entspricht. Daraus folgt aber, daſs $F' \sim G'$ ist, während wir angenommen hatten, daſs weder F' ein ähnlicher Abschnitt in G, noch G' ein solcher in F entspreche. Diese Annahme ist daher unstatthaft.

Der somit bewiesene Satz führt nun auch zu der Eingangs ausgesprochenen Folgerung über die Gesamtheit aller wohlgeordneten Mengen. Er führt nämlich zu der Conception einer einzigen wohlgeordneten Menge W von der Art, daſs jede einzelne wohlgeordnete Menge F einem Abschnitt von W ähnlich ist. Eine genauere Begriffsbestimmung dieser Menge W wird sich im folgenden noch ergeben.

Als Folgerung unseres Hauptsatzes beweisen wir endlich noch den folgenden Satz:

II. Eine Teilmenge von F ist entweder F selbst oder einem Abschnitt von F ähnlich.

Wäre nämlich die Teilmenge F' von F weder F selbst noch einem Abschnitt von F ähnlich, so gäbe es auf Grund des vorstehenden Satzes einen Abschnitt A' von F', so daſs $A' \sim F$ ist; das Element von F', also auch von F, zu dem A' gehört, sei f'. Ist jetzt F'' die Teilmenge von A', die der Teilmenge F' von F ähnlich ist, so müſste es auch einen Abschnitt A'' von F'' geben, so daſs $A'' \sim F'$ ist, und es sei f'' das Element von F'', also auch von A', zu dem A'' gehört. Alsdann ist notwendig $f'' \prec f'$; so weiterschlieſsend gelangen wir zu der Reihe

$$f' \succ f'' \succ f''' \succ \cdots$$

vom Typus $^*\omega$, was unmöglich ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Einfache Beispiele dieses Satzes sind bereits auf S. 38 erwähnt worden.

6. Die Ordnungstypen der wohlgeordneten Mengen bezeichnen wir von nun an mit Cantor als Ordnungszahlen. Für sie ergeben sich aus dem Vorstehenden die folgenden Sätze:

III. Die Ordnungszahlen besitzen Gröſsencharakter.

Dieser Satz deckt sich im wesentlichen damit, daſs die Abschnitte einer und derselben Menge F Gröſsencharakter besitzen. Sind nämlich φ und χ zwei Ordnungszahlen, und F und G die zugehörigen wohlgeordneten Mengen, so definiren wir

$$\varphi = \chi, \quad \varphi > \chi, \quad \varphi < \chi,$$

je nachdem $F \sim G$ ist, oder G einem Abschnitt von F, oder endlich F einem Abschnitt von G ähnlich ist. Alsdann folgt aus Satz I, daſs erstens von diesen drei Möglichkeiten immer eine und

nur eine erfüllt ist, und dafs die Definition zweitens auch den weiteren Gröfsengesetzen genügt.

IV. Es giebt keine der Gröfse nach geordnete Menge von Ordnungszahlen vom Typus $^*\omega$, vielmehr giebt es für jede Gesamtheit von ihnen notwendig eine kleinste.

Ist nämlich G irgend eine der Gröfse nach geordnete Menge von Ordnungszahlen, und gäbe es für sie keine kleinste, so enthielte sie sicher eine Reihe

$$\varphi' > \varphi'' > \varphi''' > \cdots\cdots$$

vom Typus $^*\omega$. Sind jetzt F', F'', F''' die zugehörigen wohlgeordneten Mengen, so müfsten F'', $F''' \cdots$ sämtlich Abschnitten von F' ähnlich sein, und es gäbe in F' eine Reihe von Abschnitten vom Typus $^*\omega$

$$A'' > A''' > \cdots,$$

was unmöglich ist. Wir können diesen Satz auf Grund der an die Spitze gestellten Definition auch folgendermafsen aussprechen:

V. Jede Gesamtheit von Ordnungszahlen bildet, der Gröfse nach geordnet, eine wohlgeordnete Menge.

Insbesondere bildet also auch die Gesamtheit aller Ordnungszahlen eine wohlgeordnete Menge W, und diese Menge ist der bereits oben erwähnten Menge ähnlich[1]); jede Ordnungszahl kann als Ordnungstypus eines Abschnittes von W betrachtet werden. Die Anfangsglieder dieser Menge W aller Ordnungszahlen werden durch die Tabelle von S. 35 dargestellt. Die weitere Fortsetzung und deren Gesetze werden uns in Cap. VII näher beschäftigen; hier sollen zuvor erst noch die einfachen formalen Gesetze und Rechnungsregeln für Ordnungszahlen abgeleitet werden.

VI. Die Summe und das Product zweier Ordnungszahlen ist ebenfalls eine Ordnungszahl.

Dieser Satz folgt nicht etwa daraus, dafs man auf beliebige Ordnungstypen die Addition und Multiplication anwenden darf; er besagt vielmehr, dafs bei Addition und Multiplication wohlgeordneter Mengen immer wieder eine wohlgeordnete Menge entsteht. Wir beweisen in dieser Hinsicht sofort folgenden umfassenden Satz, aus dem der vorstehende folgt:

VII. Werden für die Elemente einer wohlgeordneten Menge beliebige wohlgeordnete Mengen gesetzt, so entsteht wieder eine wohlgeordnete Menge.

Sei nämlich $F = (f_1, f_2, \cdots)$ die Menge, in die für f_1, $f_2 \cdots$ die wohlgeordneten Mengen F_1, $F_2, \cdots$ gesetzt werden sollen. Zunächst ist klar, dafs die neu entstehende Menge G ein erstes Element g_1 besitzt; denn F und F_1 haben ein solches. Hätte nun

---

1) Vgl. auch Cantor in Math. Ann. 46, S. 495.

nicht jede Teilmenge G' von G ein erstes Element, so gäbe es in ihr eine Reihe vom Typus $^*\omega$

$$g' > g'' > g''' > \cdots\cdot$$

Daraus würde aber leicht die Existenz einer analogen Reihe

$$F' > F'' > F''' > \cdots\cdot$$

folgen, und daraus wieder die Existenz einer Reihe

$$f' > f'' > f''' > \cdots\cdot,$$

die ebenfalls den Typus $^*\omega$ besitzt, was unmöglich ist.

Von den Rechnungsgesetzen bleiben auch für die Ordnungszahlen nur die associativen anwendbar, sowie das distributive in dem Fall, daſs der Multiplicandus eine Summe ist.[1])

Der zweite der obigen Sätze zeigt, daſs auch die Summe von unendlich vielen Ordnungszahlen stets wieder eine Ordnungszahl darstellt; was also im Gebiet der gewöhnlichen Zahlen nur unter der Bedingung der Convergenz stattfindet, gilt im Gebiet der transfiniten Ordnungszahlen ohne jede Beschränkung.

7. Dies führt zu einer letzten sehr bemerkenswerten und wichtigen Consequenz. Sei nämlich

$$\{\varphi_\nu\} = \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \cdots\cdot < \varphi_\nu < \cdots\cdot$$

eine Reihe wachsender Ordnungszahlen vom Typus ω, so läſst sich stets eine erste Ordnungszahl definiren, die gröſser ist als jedes φ_λ. Nämlich es sei

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \varrho_1, \ \varphi_3 = \varphi_2 + \varrho_2, \cdots\cdot \varphi_{\lambda+1} = \varphi_\lambda + \varrho_\lambda \cdots\cdot,$$

so folgt

$$\varphi_{\lambda+1} = \varphi_1 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots\cdots\cdot + \varrho_\lambda,$$

und es stellt daher die unendliche Summe

1) Es ist z. B. $\nu + \omega$ der Ordnungstypus der Menge

$$(e_1, e_2, \cdots\cdots e_\nu; f_1, f_2, f_3 \cdots\cdots),$$

und daher

$$\nu + \omega = \omega,$$

während $\omega + \nu$ als Ordnungstypus der Menge

$$(f_1, f_2, f_3, \cdots f_\nu \cdots; e_1, e_2, \cdots e_\nu)$$

von ω verschieden ist. Ebenso ist $\nu \cdot \omega$ Ordnungstypus von

$$(f_{11}, f_{12}, \cdots f_{1\nu}; f_{21}, f_{22} \cdots f_{2\nu}; f_{31}, f_{32}, \cdots f_{3\nu} \cdots),$$

und daher $\nu \cdot \omega = \omega$, wohingegen $\omega \cdot \nu$ als Ordnungstypus von

$$(f_{11}, f_{12}, f_{13}, \cdots\cdot; f_{21}, f_{22}, \cdots\cdot; f_{\nu 1}, f_{\nu 2} \cdots)$$

gleich einer Summe von ν Summanden ω ist.

$$\varphi_1 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_\nu + \cdots\cdots$$

eine wohldefinirte Ordnungszahl φ dar. Diese Ordnungszahl ist die verlangte. Sie ist in der That gröfser als jedes φ_λ; sie ist aber zugleich die kleinste Ordnungszahl dieser Art. Denn ist $\varphi' \prec \varphi$, und sind F, F', F_λ die wohlgeordneten Mengen, die den Zahlen φ, φ', φ_λ entsprechen, so folgt zunächst, dafs F' einem Abschnitt von F ähnlich ist. Jeder Abschnitt von F ist aber zugleich Abschnitt eines F_λ, und man sieht leicht, dafs es deshalb Werte λ', resp. Abschnitte $F_{\lambda'}$ geben mufs, so dafs F' Abschnitt von $F_{\lambda'}$ ist. Alsdann ist aber auch $\varphi' < \varphi_{\lambda'}$.

Die so definirte Ordnungszahl φ ist von Cantor als Limeszahl bezeichnet worden; wir setzen

$$\varphi = \operatorname*{Lim}_\nu \varphi_\nu = \varphi_\omega$$

und erhalten zugleich folgenden Satz:

VIII. Zu jeder Fundamentalreihe $\{\varphi_\nu\}$ von wachsenden Ordnungszahlen gehört eine Limeszahl $\operatorname*{Lim}_\nu \varphi_\nu = \varphi_\omega$, die auf alle φ_ν der Gröfse nach zunächst folgt.

Das einfachste Beispiel einer solchen Limeszahl ist ω selbst, insofern ω die erste Zahl ist, die auf alle Zahlen

$$1 \quad 2 \quad 3 \cdots\cdots \nu \cdots\cdots$$

der Gröfse nach folgt. Analog definirt die Fundamentalreihe

$$\omega, \ \omega \cdot 2, \ \omega \cdot 3, \ \cdots\cdots \omega \cdot \nu \cdots\cdots$$

eine Limeszahl, die auch durch

$$\omega + \omega + \omega + \cdots\cdots = \omega \cdot \omega = \omega^2$$

bezeichnet werden kann. Ferner bestimmt die Fundamentalreihe

$$\omega, \ \omega^2, \ \omega^3 \cdots\cdots$$

eine Limeszahl, die wir ω^ω schreiben; setzen wir endlich

$$\omega^\omega = \omega_1, \quad \omega_1{}^\omega = \omega_2, \cdots\cdots,$$

so bestimmt auch die Reihe

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3 \cdots\cdots$$

eine neue Limeszahl u. s. w. u. s. w.

Für die Limeszahlen gelten analoge Sätze wie für die Irrationalzahlen; insbesondere unterliegt die Gleichheit zweier Limeszahlen $\alpha_\omega = \beta$ und $\alpha_\omega' = \beta'$, die durch Fundamentalreihen $\{\alpha_\nu\}$ und $\{\alpha_\nu'\}$ definirt sind, den analogen Kriterien wie die Gleichheit zweier Irrationalzahlen, wie bereits oben in dem allgemeineren Fall beliebiger Ordnungstypen für die bezüglichen Fundamentalreihen resp. die durch sie dargestellten Grenzelemente erwähnt wurde.

Siebentes Capitel.

Die höheren Zahlklassen[1]).

Die der Gröfse nach geordneten Ordnungszahlen gestatten gewisse natürliche Einschnitte, die zu ihrer Spaltung in Zahlklassen Veranlassung geben. Die Ordnungszahlen 1, 2, 3, $\cdots \nu \cdots$ entsprechen Mengen, deren Mächtigkeit endlich ist; ihre Gesamtheit ist aber bereits transfinit und zwar von der ersten Mächtigkeit. Wir fassen die bezüglichen Ordnungszahlen als erste Zahlklasse Z_1 zusammen. Analog definiren wir zunächst als zweite Zahlklasse Z_2 diejenigen Ordnungszahlen, die zu wohlgeordneten Mengen erster Mächtigkeit gehören (1); es wird sich zeigen, dafs dieser Gesamtheit die zweite Mächtigkeit zukommt (2).

Die Zahlen der ersten Zahlklasse ergeben sich sämtlich auf Grund eines einzigen Bildungsgesetzes; es besagt, dafs wenn die Zahl ν existirt, auch $\nu + 1$ existirt (erstes Erzeugungsprincip). Andererseits führt aber auch die alleinige Anwendung dieses Princips nicht über die erste Zahlklasse hinaus.

Um die Zahlen der zweiten Zahlklasse zu erhalten, bedarf es noch eines zweiten Erzeugungsprincips. Dem oben abgeleiteten Theorem gemäfs besagt es, dafs für jede Fundamentalreihe $\{\varphi_\nu\}$ wachsender Ordnungszahlen eine erste Ordnungszahl existirt, die gröfser als alle φ_ν ist. Dieses Princip ist zum Zweck der Construction der transfiniten Zahlen bereits 1883 von Cantor in den „Grundlagen" ausgesprochen worden; damals allerdings nur in der Form eines Postulats, während es hier als Folgerung aus der allgemeinen Theorie der wohlgeordneten Mengen, resp. aus der ihnen zu Grunde gelegten Definition erscheint.

Der Fortschritt, den die Mengenlehre in diesem Punkt seit der Veröffentlichung der „Grundlagen" gemacht hat, besteht also auch hier wesentlich in der Klärung der grundlegenden Begriffe und Methoden, sowie der auf ihnen ruhenden Beweise. Insbesondere ist eine eingehendere Erörterung auch jetzt nur für die Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse vorhanden. Cantor hat ausführlich dargelegt, wie man mit ihnen zu rechnen hat, und hat insbesondere gelehrt, dafs man auch den Potenzbegriff für die transfiniten Zahlen der ersten und zweiten Klasse definiren kann (3). Für die auf sie folgenden Zahlen resp. Zahlklassen besitzen wir nur eine ganz unbestimmte Perspective, die ebenfalls schon in den „Grundlagen" vorhanden ist. Auch die Beziehung der Zahlklassen zum Continuum hat bisher eine wirkliche Förderung nicht erfahren (4). Dagegen haben neuere Arbeiten den Zahlen der zweiten Zahlklasse eine immer steigende Bedeutung

---

1) Vgl. Math. Ann. 21, S. 576 ff. u. 49, S. 207.

verliehen. Sie haben auf den mannigfachsten Gebieten Anwendung gefunden und sich in ihnen als die naturnotwendigen Symbole herausgestellt, insbesondere überall da, wo unbegrenzte Folgen von Grenzprocessen in Betracht zu ziehen sind. Sie besitzen auch eine einfache Beziehung zu den sogenannten „Unendlich" der Functionen P. du Bois' (7). Ihrer Einführung danken wir es, dafs wir die bisherigen mehr unbestimmten Vorstellungen durch ebenso sichere und klare Begriffe ersetzen durften, wie wir uns deren im Gebiet der endlichen Zahlen bedienen. Ich verweise hierfür auf einen unten folgenden Satz Borel's (5), den ich als Grundlage benutzt habe, um daraus den (6) auf Cantor, Vivanti und Poincaré zurückgehenden Satz abzuleiten, dafs eine analytische Function für jeden Wert der Variablen höchstens eine abzählbare Menge von Functionswerten zuläfst. Ich habe übrigens die Beweismethoden dadurch zu kürzen gesucht, dafs ich neben dem Schlufs von ν auf $\nu + 1$, der dem ersten Erzeugungsprincip entspricht, den Schlufs von $\{\nu\}$ auf ω resp. allgemeiner den Schlufs von $\{\alpha_\nu\}$ auf α_ω eingeführt habe. Die methodische Einführung dieser Schlufsweise scheint geeignet, die Darlegung in formaler Hinsicht wesentlich zu vereinfachen.

1. Um die oben angegebene Definition der zweiten Zahlklasse als berechtigt zu erweisen, ist zu zeigen, dafs das zweite Erzeugungsprincip für die Bestimmung der zweiten Zahlklasse charakteristisch ist. Wir zeigen zunächst, dafs wir mit diesem Princip in Verbindung mit dem ersten Erzeugungsprincip zu jeder Zahl der zweiten Zahlklasse gelangen. Dies kann folgendermafsen geschehen.

Jede Zahl φ der zweiten Zahlklasse entspricht einer wohlgeordneten Menge F der ersten Mächtigkeit. Hat diese Menge ein letztes Element f', so sei F_2 diejenige Teilmenge, die aus f' und allen ihm unmittelbar vorangehenden Elementen besteht. Diese Teilmenge ist endlich, da sonst in F eine Teilmenge vom Typus $^*\omega$ vorhanden wäre. Wir haben also

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

wo $\varphi_2 = \nu$ endlich ist und φ_1 einer Menge F_1 ohne letztes Element entspricht. Es genügt also, dafs wir uns auf solche Zahlen φ_1 beschränken, die zu Mengen F_1 ohne letztes Element gehören; sie sind, wie sich zeigen wird, nichts anderes, als die oben eingeführten Limeszahlen.

Betrachten wir nämlich die Menge aller Zahlen $\psi < \varphi_1$, so sind dies diejenigen, die zu den Abschnitten der Menge F gehören. Da F kein letztes Element besitzt, so giebt es in der Menge der Ordnungszahlen ψ keine gröfste. Diese Menge ist überdies nach Annahme abzählbar und kann daher in eine Reihe vom Typus ω gesetzt werden; sie sei

$$\{\psi_\nu\} = \psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3 \cdots \psi_\nu \cdots$$

In dieser Reihe giebt es jetzt notwendig eine Zahl, die gröſser ist als ψ_1, da sonst ψ_1 die gröſste von ihnen wäre, was ausgeschlossen ist; es sei ψ_λ die erste Zahl der obigen Reihe, die gröſser als ψ_1 ist. Ebenso sei ψ_μ die notwendig existirende erste Zahl der Reihe, die gröſser ist als ψ_λ u. s. w.; so weiterschlieſsend erhalten wir eine Reihe wachsender Ordnungszahlen

$$\psi_1 < \psi_\lambda < \psi_\mu < \cdots$$

vom Typus ω, und man überzeugt sich leicht, daſs auch die Indices stetig wachsen, so daſs

$$1 < \lambda < \mu < \cdots$$

ist. Diese Reihe definirt jetzt eine Limeszahl ψ_ω, die gröſser ist als ψ_ϱ für j e d e s ϱ, sie ist ihrer Definition nach die kleinste derartige Zahl und ist daher mit φ_1 identisch. Damit ist der verlangte Beweis geliefert. Wir können dies auch folgendermaſsen als Satz aussprechen:

I. Jede Zahl der zweiten Zahlklasse ist entweder eine Limeszahl φ_ω, oder sie ist von der Form $\varphi_\omega + \nu$, wo φ_ω Limeszahl und ν endlich ist.

Haben wir umgekehrt irgend welche Zahlen der ersten oder zweiten Zahlklasse und wenden auf sie das zweite Erzeugungsprincip an, bilden also die Zahl $\varphi_\omega = \{\varphi_\nu\}$, so haben wir stets (S. 42)

$$\varphi_{\nu+1} = \varphi_\nu + \varrho_\nu,$$

und demgemäſs

$$\varphi_\omega = \operatorname{Lim} \varphi_\nu = \varphi_1 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_\nu + \cdots$$

Da nun jede abzählbare Menge endlicher oder abzählbarer Mengen selbst abzählbar ist, so ist φ_ω eine Zahl der zweiten Zahlklasse. Also gelangen wir zu folgendem Gesamtergebnis:

II. Das erste und zweite Erzeugungsprincip sind notwendig und hinreichend, um aus den Zahlen der ersten Zahlklasse die Zahlen der zweiten Zahlklasse abzuleiten.

2. Wir gehen nun zur Untersuchung der Mächtigkeit der zweiten Zahlklasse Z_2 über, die wir mit C a n t o r durch $\aleph_1$ bezeichnen; zugleich setzen wir $\mathfrak{a} = \aleph_0$. Es wird sich zeigen, daſs $\aleph_1$ die zweite Mächtigkeit darstellt. Zunächst beweisen wir, daſs die zweite Zahlklasse nicht abzählbar ist. Der Beweis ist dem auf S. 19 geführten durchaus analog. Wäre sie nämlich abzählbar, so könnte man sie in die Form einer Reihe vom Typus ω setzen, die wir durch

$$\{\varphi_\nu\} = \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3 \cdots$$

bezeichnen. Nun ist zunächst klar, daſs es unter den Zahlen der
'asse keine gröſste giebt; denn wäre φ eine solche, so

gehörte auch $\varphi + 1$ der zweiten Zahlklasse an. Es giebt daher notwendig Zahlen, die gröfser sind als φ_1; von ihnen sei φ_λ die erste Zahl der Reihe. Ebenso sei φ_μ die erste Zahl, so dafs $\varphi_\mu > \varphi_\lambda$; so weiterschliefsend gelangen wir wieder zu einer unendlichen Reihe von Ordnungszahlen

$$\varphi_1 < \varphi_\lambda < \varphi_\mu < \cdots,$$

so dafs zugleich

$$1 < \lambda < \mu < \cdots$$

ist. Diese Reihe definirt wieder eine Limeszahl φ_ω, so dafs $\varphi_\omega > \varphi_\varrho$ für jedes ϱ ist; diese Zahl kann daher in der obigen Reihe nicht enthalten sein; andererseits ist sie aber eine Zahl der zweiten Zahlklasse, und damit ist der Beweis geliefert.

Wir zeigen zweitens, dafs jede unendliche Teilmenge Z' von Zahlen der zweiten Zahlklasse entweder abzählbar ist, oder selbst die Mächtigkeit $\aleph_1$ der zweiten Zahlklasse Z_2 besitzt. Wird nämlich die Menge Z' der Gröfse nach geordnet, so entsteht eine wohlgeordnete Menge, die nach Cap. VI, Satz VII entweder Z_2 oder einem Abschnitt von Z_2 ähnlich ist. Ist das zweite der Fall, so gehört zu dem Abschnitt eine Ordnungszahl, die Zahl von Z_2 ist, und die also einer Menge erster Mächtigkeit zugehört. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Hieraus ziehen wir endlich die weitere Folgerung, dafs es keine Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ giebt, so dafs $\aleph_0 < \mathfrak{m} < \aleph_1$ wäre. Denn sonst müfste es eine Teilmenge M von Z_2 geben, die die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ hat; aber jede Teilmenge hat entweder die Mächtigkeit $\aleph_0$ oder $\aleph_1$.

Wir bezeichnen deshalb die Mächtigkeit $\aleph_1$ von Z_2 als zweite Mächtigkeit und haben so den Satz:

III. Die zweite Zahlklasse besitzt die zweite Mächtigkeit $\aleph_1$.

3. Eine letzte Frage formaler Natur, die Cantor für die Zahlen von Z_2 behandelt hat, ist die, ob es für sie eine bestimmte einfachste Darstellungsart giebt, und wie man die Summe oder das Product zweier von ihnen in diese einfachste Form bringt[1]). Das Haupthilfsmittel besteht darin, dafs man im Gebiet der Zahlen α den Potenzbegriff definiren kann, und zwar so, dafs die grundlegenden Rechnungsgesetze erfüllt bleiben. Diese Untersuchungen haben bisher eine Anwendung in Analysis oder Geometrie nicht gefunden, sie haben wesentlich formale Bedeutung, und deshalb mag es genügen, sie hier nur in aller Kürze zu erwähnen.

Die Einführung des Potenzbegriffes beruht auf folgendem Satz:

1) Vgl. Math. Ann. 49, S. 229 ff. Ein Teil der bezüglichen Resultate befindet sich bereits in den „Grundlagen" kurz angegeben, S. 583 ff. Ein einfaches Beispiel für die bezügliche Aufgabe liefert die auf S. 38, Anm. 1 stehende Relation, dafs $\omega + \omega^2 = \omega^2$ ist.

IV. Ist ξ eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlklasse, ist $\gamma > 1$ und $\delta > 0$, so giebt es eine einzige eindeutige Function $f(\xi)$, die folgenden Bedingungen genügt: Es ist 1) $f(0) = \delta$, 2) $f(\xi) < f(\xi')$, falls $\xi < \xi'$ ist, 3) $f(\xi + 1) = f(\xi) \cdot \gamma$ und 4) $\operatorname{Lim} f(\xi_\nu) = f(\xi_\omega)$, wo $\xi_\omega = \operatorname{Lim} \xi_\nu$ ist.

Was den Beweis dieses Satzes betrifft, so folgt die Existenz einer eindeutigen Function $f(\xi)$ für $\xi = 1, 2, 3 \cdots$ aus 1) und 3) direct, und kann alsdann mittelst der Relationen 2) und 4) durch den Schlufs von ν auf $\nu + 1$ und von $\{\alpha_\nu\}$ auf α_ω für jedes α leicht erwiesen werden. Setzt man nun insbesondere $\delta = 1$, so erhält man diejenige Function $f(\xi)$, die Cantor als Potenz γ^ξ bezeichnet; sie genügt den Gesetzen, dafs $\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta$ und $\gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^\alpha)^\beta$ ist. Die einfachsten Potenzzahlen sind die bereits früher benutzten Zahlen ω^2, $\omega^3, \cdots$, resp. die aus ihnen zusammensetzbaren

$$\varphi = \omega^\lambda \cdot \nu + \omega^{\lambda-1} \cdot \nu_1 + \cdots + \omega \cdot \nu_{\lambda-1} + \nu_\lambda,$$

wo alle λ und ν endlich sind. Mittelst dieses Potenzbegriffs hat Cantor zwei verschiedene Normalformen für die Zahlen α eingeführt, die eine ist eine Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern, die andere ein analoges Product. Die Productdarstellung gestattet auch den Primzahlbegriff für die Zahlen α zu definiren[1]).

Eine letzte bemerkenswerte Folge des Potenzbegriffs ist die Existenz einer Zahlengattung, die der Gleichung $\omega^\xi = \xi$ genügt, und die Cantor als E-Zahlen bezeichnet. Die einfachste von ihnen wird durch die Fundamentalreihe

$$\omega,\ \omega^\omega = \omega_1,\ \omega^{\omega_1} = \omega_2,\ \cdots\ \omega^{\omega_{\nu-1}} = \omega_\nu,\ \cdots$$

resp. durch deren Limeszahl dargestellt. Jede Zahl ε dieser Art genügt, falls $\alpha < \varepsilon$ ist, den drei Gleichungen

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon,\quad \alpha\varepsilon = \varepsilon,\quad \alpha^\varepsilon = \varepsilon,$$

ihre Gesamtheit hat die zweite Mächtigkeit und bildet, der Gröfse nach geordnet, eine Menge, die der Menge aller Zahlen der zweiten Zahlklasse ähnlich ist.

4. In Verallgemeinerung der Definition der zweiten Zahlklasse kann man zu Definitionen noch höherer Zahlklassen aufsteigen. Insbesondere wird die dritte Zahlklasse als Gesamtheit derjenigen Ordnungszahlen definirt, die eine Menge zweiter Mächtigkeit darstellen. Um sie zu bilden, würde man noch eines neuen Erzeugungsprincips bedürfen, das Limeszahlen für eine wachsende Reihe von Ordnungszahlen auch in dem Fall postulirt, dafs die Reihe denjenigen Typus Ω hätte, der der wohlgeordneten Menge aller Ordnungszahlen der ersten

1) Es ist $\omega + 1$ eine Primzahl, dagegen ist $\omega + 2$ zerlegbar. Denn $\omega + 2 = 2 \cdot \omega + 2 = 2 \cdot (\omega + 1)$, was man auch leicht bestätigt, indem man die zu $\omega + 2$ und $2 \cdot \omega + 2$ gehörenden Mengen bildet.

und zweiten Zahlklasse zukommt. Von dieser dritten Zahlklasse würde sich wieder erweisen lassen, dafs ihr die nächsthöhere Mächtigkeit zu $\aleph_0$ und $\aleph_1$ beikommt. So kann man fortfahren; es erwächst so der Ausblick auf eine wohlgeordnete Menge der Gröfse nach geordneter Mächtigkeiten

(A) $$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \cdots\cdot \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1} \cdots\cdot,$$

und zwar ist jede als einer Zahlklasse zugehörig zu betrachten, die die Gesamtheit aller Ordnungstypen darstellt, die einer Menge der vorhergehenden Mächtigkeit entsprechen. Cantor hat dafür auch den Ausdruck benutzt, dafs die Ordnungstypen jeder Zahlklasse abzählbar werden durch die Ordnungszahlen der nächstfolgenden Klasse. Doch ist man hier über diese allgemeinen Definitionen und Formulirungen nicht hinausgekommen. Nur ist zu bemerken, dafs die obige Reihe aller $\aleph$ der schon früher erwähnten Reihe W ähnlich ist, die die Menge aller der Gröfse nach geordneten Ordnungszahlen darstellt.

Die vorstehende Reihe von Mächtigkeiten würde eine erhöhte Bedeutung erhalten, falls ein von Cantor in den „Grundlagen" bereits postulirter Satz eine Bestätigung finden sollte. Es ist der Satz, dafs jede wohldefinirte Menge auch in die Form einer wohlgeordneten Menge gesetzt werden kann. Cantor hat diesen Satz in den „Grundlagen" als ein „durch seine Allgemeingültigkeit besonders merkwürdiges Denkgesetz" bezeichnet[1]) und hat in Aussicht gestellt, auf ihn noch näher zurückzukommen. Doch ist dies bisher nicht geschehen, und so kann man dem Satz eine objective Geltung für den Augenblick in keiner Weise beilegen. Ja, man würde es sogar verstehen, wenn ein so umfassender und allgemeiner Satz einer ausgedehnten Skepsis begegnete.

Würde der Satz zutreffen, so würde er allerdings von den weitgehendsten Folgen sein, denn die Mächtigkeit einer jeden Menge müfste in der Reihe A) enthalten sein. Es ist kaum zuviel gesagt, wenn ich meine, dafs die Fixirung der Stelle, die $\mathfrak{c}$ in der Reihe A) hat, stets eines der Hauptziele Cantor's gewesen ist, und dafs wir diesem Umstande einen grofsen Teil seiner allgemeinen mengentheoretischen Untersuchungen zu danken haben. Soll $\mathfrak{c}$ überhaupt in A) vorkommen, so müfste es jedenfalls möglich sein, die Zahlengesamtheit in die Form einer wohlgeordneten Menge zu bringen, und falls insbesondere $\mathfrak{c} = \aleph_1$ ist, wie es der Cantor'schen Überzeugung entspricht, so müfste diese Menge der Menge aller Zahlen der zweiten Zahlklasse ähnlich sein. Es ist nicht zu leugnen, dafs

---

1) S. 8. Vgl. auch Math. Ann. 21, S. 550. Auch Borel's Mengendefinition geht von diesem Axiom aus. Beim C solle man sich die Punkte hintereinander durchlaufen denken! Leçons etc., S. 3; vgl. jedoch auch S. 15.

mancherlei äufsere und innere Momente es nahe legen, für das Continuum und die Zahlen der zweiten Klasse eine solche Beziehung vorauszusetzen. Als äufsere Analogie nenne ich den Limesbegriff, der beiden gemeinsam ist, sowie die Thatsache, dafs es in beiden Fällen eine Gesamtheit aller möglichen Limesgesetze ist, die für die Definition resp. für die Mächtigkeit beider Mengen in Frage kommen. Ein mehr inneres Moment ist der Umstand, dafs für die Untersuchung der Punktmengen der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ die Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse vollständig ausreichen[1]); von den Mengen, die nicht abzählbar sind, hat sich sogar in den allermeisten Fällen beweisen lassen, dafs ihre Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ ist. Trotzdem aber ist die Frage nach der Mächtigkeit des Continuums heute noch ebenso ungeklärt, wie damals, als Cantor es als nicht abzählbar erkannte[2]).

5. Um die Bedeutung der transfiniten Zahlen für Analysis und Geometrie darzulegen, gebe ich zunächst ein mehr formales Beispiel, das die oben begonnene Zerlegung der Menge R aller rationalen echten Brüche in Teilmengen betrifft. Die Teilmenge R_ω entstand, indem wir der Reihe nach die Brüche abtrennten, deren Nenner eine Potenz von 2, von 3, von 5 $\cdots$ war; sie besteht aus allen Brüchen, deren Nenner verschiedene Primzahlen enthalten. Von R_ω spalten wir wieder der Reihe nach diejenigen Brüche ab, deren Nenner eine Potenz von resp. $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 7 \cdots\cdots$ ist; so entstehen aus R_ω nach einander die Restmengen

$$R_{\omega+1},\ R_{\omega+2},\ R_{\omega+3}\cdots\cdots,$$

die eine ihnen allen gemeinsame Teilmenge $R_{\omega\cdot 2}$ besitzen. Von ihr spalten wir die Menge ab, deren Nenner Potenzen resp. von $3 \cdot 5$, $3 \cdot 7$, $3 \cdot 11 \cdots\cdots$ sind, und gelangen dadurch zu den Mengen

$$R_{\omega\cdot 2+1},\ R_{\omega\cdot 2+2},\ R_{\omega\cdot 2+3}\cdots\cdots$$

und zu einer allen gemeinsamen Teilmenge $R_{\omega\cdot 3}$. So fortfahrend erhalten wir schliefslich eine Menge R_{ω^2} aller Brüche, deren Nenner mehr als zwei verschiedene Primzahlen enthalten. Von ihr spalten wir die Brüche ab, deren Nenner drei Primzahlpotenzen enthalten, und können dies so einrichten, dafs die restirende Teilmenge durch R_{ω^3} zu bezeichnen ist. Wir können auf diese Weise sogar eine Menge R_{ω^ω} erreichen, die alle Brüche enthält, in deren Nenner Primzahlen zu verschiedenen Potenzen vorkommen. Aus dem Satz, dafs die Menge der Zahlen von Z_2 die zweite Mächtigkeit besitzt, folgt

1) Vgl. insbesondere S. 67 ff.

2) Ich weise bei dieser Gelegenheit auf einen Satz von Bettazzi hin, der besagt, dafs man die Zahlengesamtheit nicht ausdrücken kann, wenn man zwar eine abzählbare Menge von Zeichen verwendet, aber für jede Zahl nur eine endliche Menge dieser Zeichen benutzt. Vgl. Per. di mat. 6, S. 14 (1891). Der Satz folgt daraus, dafs $\mathfrak{a}^\nu = \mathfrak{a}$ ist. Dafs $\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$ sei, meinte auch schon Bolzano, Paradoxieen, S. 102.

nun aber, dafs dieser Procefs, wie wir ihn auch fortsetzen mögen, für eine bestimmte transfinite Zahl α der zweiten Zahlklasse ein Ende nimmt, so dafs $R_\alpha = 0$ ist. Denn da R abzählbar ist, so müssen die Teilmengen, die wir der Reihe nach abspalten, eine abzählbare Menge bilden. Existirte nun ein R_α für jedes α, so würde die Menge R die zweite Mächtigkeit besitzen.

Nunmehr sind wir auch im stande, das auf S. 34 behandelte Beispiel näher zu erörtern, resp. den dort verlangten Beweis zu führen. Da die Intervalle, die man auf einer Geraden nebeneinanderlegen kann, eine abzählbare Menge bilden, so folgt sofort, dafs eine Zahl α der zweiten Zahlklasse existirt, für die der bezügliche Procefs ein Ende nimmt. Man kann dies auch so aussprechen, dafs, wenn man aus dem Continuum eine wohlgeordnete Menge von Zahlen herausgreift, die der Gröfse nach geordnet sind, diese Menge immer die erste Mächtigkeit besitzt.

Um ein letztes Beispiel zu geben, beweise ich folgenden Satz Borel's[1]), der einen bekannten Satz von Heine erweitert:

V. Giebt es auf einer Geraden eine unendliche Reihe von Intervallen δ, so dafs jeder Punkt des Intervalls $a \cdots\cdots b$ innerer Punkt mindestens eines Intervalles δ ist, so giebt es auch stets eine endliche Teilmenge solcher Intervalle.

Sei nämlich a_1 ein beliebiger Punkt und δ_1 das zugehörige Intervall, ferner sei a_2 der linke Endpunkt von δ_1, und δ_2 das zugehörige Intervall, ebenso sei a_3 der linke Endpunkt von δ_2 u. s. w. Wird nun a noch nicht mittelst einer endlichen Anzahl von Intervallen $\delta_1, \delta_2 \cdots\cdots \delta_\nu$ erreicht, so haben die Punkte

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots\cdots a_\nu \cdots$$

notwendig einen Grenzpunkt a_ω, zu dem ein Intervall δ_ω gehört. Alsdann sei $a_{\omega+1}$ der linke Endpunkt von δ_ω, ferner $\delta_{\omega+1}$ das zugehörige Intervall und $a_{\omega+2}$ dessen linker Endpunkt u. s. w. Wir gelangen so zu einer wohl bestimmten Reihe von Punkten

$$a_1,\ a_2, \cdots a_\omega, \ \cdots a_\alpha, \cdots$$

resp. von Intervallen

$$\delta_1,\ \delta_2, \cdots \delta_\omega, \cdots \delta_\alpha, \cdots,$$

die gemäfs dem Satz von S. 13 abzählbar ist und daher notwendig bei einem bestimmten α abbricht.

Diese Intervallreihe läfst sich nun immer durch eine endliche Menge analoger Intervalle ersetzen. Gehen wir zunächst zum Punkt a_ω zurück, so giebt es sicher eine Zahl μ, so dafs alle Punkte a_μ, $a_{\mu+1}, \cdots$ innerhalb δ_ω liegen und daher $a_1 \cdots a_\omega$ bereits durch die

1) Ann. de l'Ec. Norm. (3) 12, S. 51 (1895).

Intervalle $\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_\mu, \delta_\omega$ bedeckt wird. Derselbe Schlufs gilt aber auch für jeden Punkt a_β, der Grenzpunkt einer Punktfolge

$$a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}, \cdots a_{\alpha_\nu}, \cdots$$

ist, so dafs auch der Schlufs von $\{a_{\alpha_\nu}\}$ auf $a_{\alpha_\omega} = a_\beta$ anwendbar ist. Wird nämlich vorausgesetzt, dafs jedes $a_{\alpha_{i+1}}$ von a_{α_i} aus durch eine endliche Anzahl von Intervallen erreichbar ist, so gilt dies auch von a_β; denn zu a_β gehört wieder ein Intervall δ_β, und innerhalb desselben liegen von einem bestimmten μ an alle Punkte a_{α_μ}, $a_{\alpha_{\mu+1}} \cdots$. Da nun auch zu den Endpunkten a und b Intervalle δ gehören sollen, so ist damit die Behauptung bewiesen.

Es ist nicht schwer, den gleichen Satz auch auf die Ebene und den Raum zu übertragen[1]). Ist nämlich a_1 jetzt ein Punkt eines ebenen Rechteckes H und δ_1 der um ihn gelegte Bereich, den ich der Einfachheit halber als Quadrat annehme, so gehört zu jedem Punkt a_2 auf dem Umfang von δ_1 ebenfalls ein solches Quadrat δ_1', und aus dem eben bewiesenen Satz folgt, dafs es eine endliche Zahl von Quadraten giebt, so dafs zunächst alle Punkte a_2 auf dem Umfang von δ_1 innere Punkte eines dieser Quadrate werden. Es giebt daher jedenfalls auch ein Quadrat δ_2, das δ_1 umschliefst, so dafs alle Punkte innerhalb und auf dem Umfang von δ_2 durch eine endliche Zahl von Quadraten bedeckt sind. Zu ihm giebt es ein analoges Quadrat δ_3 u. s. w., und der Beweis geht nun in analoger Weise weiter fort, wie der obige. Auch hier mufs zu jedem Punkt des Umfangs von H ebenfalls ein Bereich δ gehören.

6. Der eben bewiesene Satz liefert den einfachsten Beweisgrund für das folgende Theorem:

VI. Die Gesamtheit der Werte, die eine analytische Function in einem inneren Punkte ihres Convergenzgebietes annimmt, ist abzählbar oder endlich.

Diesen Satz hat zuerst Vivanti bewiesen, in Folge einer von Cantor an ihn ergangenen Aufforderung[2]), bald darauf haben auch Poincaré[3]) und Volterra[4]) einen Beweis dafür gegeben. Der Poincaré'sche Beweis stützt sich in erster Linie darauf, dafs man für die Bestimmung eines im Punkte ξ vorhandenen Functionswertes immer ein Functionselement wählen kann, dessen Mittelpunkt ein rationaler Punkt ist. Der eben bewiesene Satz sagt nun aus, dafs man, um von dem ursprünglichen Functionselement zu irgend einem daraus abgeleiteten zu gelangen, stets mit einer endlichen Zahl von Zwischenpunkten ausreicht. Ist daher r ein rationaler

1) Vgl. hierzu auch Thomae, Elementare Theorie, S. 29 (1880).
2) Rend. Palermo 2, S. 135 u. 150 (1888) und Zeitschr. f. Math. 34, S. 382.
3) Rend. Palermo 2, S. 197.
4) Rend. Linc. (4) 4, S. 355.

Punkt, so ist die Menge der ihm zugehörigen Functionselemente notwendig abzählbar, und da die Menge $R = \{r\}$ ebenfalls abzählbar ist, so ist damit gemäfs S. 11 der Satz bewiesen.

Nach einer Bemerkung von Borel[1]) gilt der Satz übrigens nicht mehr für die Werte auf der Grenze des Convergenzgebietes, falls solche überall existiren resp. definirbar sind. Für diese ist nämlich der bezügliche Wert immer nur als Grenze einer unendlichen Folge definirbar, und die Gesamtheit aller dieser Fundamentalreihen ist nicht mehr abzählbar.

Vivanti und Volterra haben an den obigen Satz noch einige weitergehende Folgerungen geknüpft. Volterra hat darauf hingewiesen, dafs auch die Menge der Verzweigungspunkte und der Convergenzgebiete einer analytischen Function abzählbar ist; Vivanti dagegen hat den Versuch gemacht, die mehrwertigen Functionen ganz allgemein nach ihrer Mächtigkeit in Klassen zu teilen. Sein Hauptresultat lautet, dafs falls y als Function von x für jedes x höchstens eine abzählbare Menge von Werten besitzt, dies auch für x als Function von y der Fall ist.

7. Die transfiniten Zahlen treten endlich auch bei einem Problem der elementaren Analysis auf, nämlich bei der Vergleichung von Grenzwerten, denen reelle Functionen zustreben, die über alle Grenzen wachsen[2]). Die allgemeine Theorie der einschlägigen Fragen ist von P. du Bois-Reymond dargestellt worden[3]). Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei monoton mit x ins Unbegrenzte wachsende Functionen, und hat für $\lim x = \infty$ der Quotient $f(x) : \varphi(x)$ einen endlichen Grenzwert, oder aber den Grenzwert ∞ oder 0, so sagt du Bois, $f(x)$ und $\varphi(x)$ haben gleiches Unendlich, oder aber $f(x)$ hat gröfseres, resp. kleineres Unendlich als $\varphi(x)$, was durch

$$f \sim \varphi, \quad f \succ \varphi, \quad \text{resp.} \quad f \prec \varphi$$

ausgedrückt wird. Es ist damit natürlich nicht gesagt, dafs sich für irgend zwei monoton ins Unendliche wachsende Functionen ein fester Grenzwert dieser Art immer ergiebt[4]).

Sei jetzt F eine Klasse von Functionen $f(x)$, für die eine der drei genannten Beziehungen erfüllt ist, und dies möge auch der Fall sein, wenn wir irgend eine dieser Functionen mit x selbst vergleichen.

---

1) Leçons etc., S. 56.

2) Die Function e^x wird von höherer Ordnung unendlich als jede Potenz x^ν; soll also diese Ordnung durch ein Symbol dargestellt werden, so bedarf man eines solchen, das gröfser ist als jedes ν, genau wie es für ω der Fall ist.

3) Journ. f. Math. 74, S. 294, Math. Ann. 8, S. 363 ff. und 11, S. 149 ff. Man vgl. auch die analogen Untersuchungen von Stolz, Vorlesungen über Arithmetik 1, S. 205 ff.

4) Vgl. Stolz in Math. Ann. 14, S. 232.

Falls wir den Grenzwert von $f(x): x$ als das zu $f(x)$ **gehörige Unendlich** $Uf(x)$ bezeichnen, so bestehen folgende Sätze:

1) Aus den Relationen

$$Uf(x) \sim U\varphi(x), \quad Uf(x) \gtrless U\varphi(x)$$

folgen die obenstehenden Relationen und umgekehrt.

2) Die Unendlich besitzen Grössencharakter; sie lassen sich also der Grösse nach in eine einfach geordnete Reihe bringen, die übrigens, wie wir sofort erweisen werden, keineswegs eine wohlgeordnete Menge zu sein braucht.

3) Für jede abzählbare Menge von Functionen $\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \varphi_3 \prec \cdots$ mit wachsenden Unendlich giebt es Functionen ψ, so dass für jedes ν $\psi \succ \varphi_\nu$ ist. Es giebt also kein oberstes Unendlich.

Um den letzten Satz zu beweisen, bilde man eine Reihe von Functionen

$$\psi_1(x), \ \psi_2(x) \cdots\cdots \psi_\nu(x) \cdots,$$

so dass für jeden Wert von x der Wert von $\psi_\nu(x)$ gleich oder grösser ist als der Wert von $\varphi_\nu(x)$ und von $\psi_1(x), \psi_2(x) \cdots \psi_{\nu-1}(x)$, und dass von einem bestimmten Wert x_ν an $\psi_\nu(x)$ mit $\varphi_\nu(x)$ übereinstimmt. Nachdem dies geschehen, definire man eine Function $\psi(x)$ durch die Bedingung, dass für jedes ganzzahlige ν

$$\psi(\nu) = \psi_\nu(\nu)$$

ist, und dass für $\nu < x < \nu + 1$ die Function monoton (also beispielsweise linear) zunimmt. Diese Function hat dann in der That die Eigenschaft, dass für jedes μ der Quotient $\psi(x): \psi_\mu(x)$ den Grenzwert Unendlich besitzt.

Der hiermit bewiesene Satz stellt ein Analogon zu dem zweiten Erzeugungsprincip Cantor's dar und hat vielleicht als Ausgangspunkt für die Cantor'sche Ideenbildung gedient. Doch ist die Analogie zwischen den Unendlich und den Zahlen Cantor's nur eine scheinbare, und dies selbst dann, wenn man sich auf solche Functionsklassen beschränkt, deren Unendlichwerte als ganzzahlig betrachtet werden können.

Da nämlich jedes φ eine monoton zunehmende Function ist, so ist auch die zu φ inverse Function χ eine Function der gleichen Art wie φ, und besitzt daher ebenfalls ein bestimmtes Unendlich. Es gilt nun der Satz:

VII. **Für eine Functionsklasse Φ, die zu jeder Function φ auch ihre inverse Function enthält, bilden die zugehörigen Unendlich keine wohlgeordnete Menge.**

Bilden nämlich die Functionen

$$\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \varphi_3 \cdots \prec \varphi_\nu \prec \cdots$$

eine Menge vom Typus ω, so bilden die Functionen

$$\chi_1 \succ \chi_2 \succ \chi_3 \cdots \succ \chi_\nu \succ \cdots$$

eine Menge vom inversen Typus $^*\omega$, während solche Mengen in der Gesamtheit der Ordnungszahlen gerade ausgeschlossen sind. Es folgt noch nebenbei, dafs ein zum Satz 3) analoger Satz für jede Reihe vom Typus $^*\omega$ gilt, so dafs es auch eine Function $\vartheta(x)$ giebt, die kleineres Unendlich besitzt, wie jedes χ_ν. Der eben bewiesene Satz deckt sich übrigens mit dem zweiten von du Bois für Φ als charakteristisch hingestellten Satz, der wie folgt lautet:

VIII. Ist $\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \varphi_3 \prec \cdots$ eine Reihe vom Typus ω, und ist $\psi \succ \varphi_\lambda$ für jedes λ, so giebt es keine erste Function ψ dieser Art, vielmehr giebt es für jedes ψ eine Function ψ', so dafs $\psi \succ \psi' \succ \psi_\lambda$ für jedes λ ist[1]).

Man braucht nämlich nur die Reihe

$$\frac{\psi}{\varphi_1} \succ \frac{\psi}{\varphi_2} \succ \frac{\psi}{\varphi_3} \succ \cdots$$

zu betrachten, die eine Menge vom Typus $^*\omega$ darstellt. Falls nun eine erste Function ψ dieser Art existirte, so müfsten die Unendlich der vorstehenden Reihe unter jedes Mafs sinken, und ebenso die Unendlich der inversen Functionen über jedes Mafs wachsen, was dem Satz 3) widerspricht; womit der Satz erwiesen ist.

Die vorstehenden Sätze gelten übrigens auch für die Gesamtheit aller Functionen, die ein bestimmtes Unendlich besitzen[2]).

Die der Gröfse nach geordnete Menge M der Unendlich aller Functionen $\varphi(x)$, für die ein bestimmtes Unendlich existirt, hat mit der wohlgeordneten Menge der Zahlen der zweiten Klasse nur die eine Eigenschaft gemein, dafs auf beide das zweite Erzeugungsprincip anwendbar ist. Im übrigen hat der Ordnungstypus μ von M, wie derjenige des Continuums die Eigenschaft, dafs das Unendlich f einer beliebigen Function $f(x)$ sowohl durch eine Reihe zu-

---

1) Du Bois führt als Beispiel die Reihe

$$x^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{2}{3}}, \cdots\ x^{\frac{p}{p+1}} \cdots \quad \text{und} \quad \psi' = x^{\frac{lx}{lx+1}}$$

an; die Reihe nähert sich unbegrenzt der Function $\psi = x$, und es ist das Unendlich von x gröfser als das der Function ψ'. Math. Ann. 11, S. 153.

2) Das einfachste Beispiel einer Klasse Φ bilden übrigens diejenigen Functionen, die aus

$$x,\ E_1(x) = e^x,\ E_2(x) = e^{E_1(x)} \cdots,\ L_1(x) = \lg x,\ L_2(x) = \lg L_1(x) \cdots$$

durch Multiplication und fortgesetzte Iteration gebildet sind. Die Unendlich dieser Functionen finden bekanntlich in der Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen sowie bei den Werten uneigentlicher Integrale wichtige Anwendung. Vgl. für das letzte: Dini, Grundlagen etc., S. 485.

nehmender Unendlich, wie durch eine Reihe abnehmender Unendlich approximirt werden kann. Es besagt nun aber der Satz 5), dafs auch zwischen M und dem Continuum ein sehr wesentlicher Unterschied besteht. Beim Continuum giebt es nämlich zu einer Fundamentalreihe von Zahlen $a_1, a_2, a_3, \cdots$ eine bestimmte Zahl a', so dafs a' die kleinste aller Zahlen ist, die gröfser ist als jedes a_ν, während dagegen ein kleinstes Unendlich dieser Art nicht existirt[1]).

Der du Bois'sche Begriff des Unendlich enthält übrigens insofern ein willkürliches Element, als er von derjenigen Function abhängt, der man das Unendlichkeitssymbol 1 beilegt. Er enthält aber, wie Pincherle[2]) bemerkt hat, noch eine zweite Willkür. Davon ausgehend, dafs mit $f(x)$ auch $\log f(x)$ monoton ins Unendliche wächst, kann man auch folgende Definition aufstellen. Sei $F(x)$ irgend eine Function, die mit x monoton ins Unendliche wächst, so betrachte man die Differenz

$$\delta(x) = Ff(x) - F\varphi(x)$$

und definire

$$f \succ \varphi, \ f \sim \varphi, \ f \prec \varphi,$$

je nachdem diese Differenz für $\lim x = \infty$ positiv, Null oder negativ ist. Auch diese Definition genügt den sämtlichen oben ausgesprochenen Sätzen. Es besteht aber nun der bemerkenswerte Satz, dafs die Gröfsenbeziehung zwischen dem Unendlich von $f(x)$ und $\varphi(x)$ bei verschiedener Wahl der Function $F(x)$ auch verschieden ausfallen kann. Es folgt daraus noch beiläufig, dafs im System der du Bois'schen Unendlich, falls $f \sim \varphi$ ist, nicht immer $F(f) \sim F(\varphi)$ zu sein braucht.

Ich erwähne zum Schlufs den Satz:

Die Mächtigkeit $\mathfrak{u}$ aller Unendlich ist gleich der des Continuums.

Erstens giebt es nämlich eine Teilmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, nämlich die Unendlich aller Functionen x^a, wo a irgend eine reelle Zahl ist. Da ferner das Unendlich einer jeden unstetigen Function dem einer gewissen stetigen Function gleich ist, so folgt daraus, dafs $\mathfrak{u} = \mathfrak{c}$ ist[3]).

1) Auf die hier angedeutete Verschiedenheit zwischen dem Zahlencontinuum und dem Ordnungstypus der Menge U komme ich im geometrischen Teil, in Verbindung mit dem Axiom des Archimedes, näher zurück. Nur das eine bemerke ich bereits, dafs du Bois' infinitäre Pantachie für die Menge U den der projectiven Geometrie entstammenden Begriff der unendlich fernen Geraden benutzt, der dem vorliegenden Gegenstand durchaus fremd ist. Die Auffassungen des Unendlichen sind für die einzelnen mathematischen Disciplinen durchaus verschieden.

2) Mem. di Bologna (4) 5 (1885), S. 739.

3) Borel, Leçons etc. S. 119.

Zweiter Abschnitt.

Theorie der Punktmengen.

Erstes Capitel.

Allgemeine Sätze über Punktmengen.

Die Lehre von den Punktmengen ruht teils auf arithmetischer, teils auf geometrischer Grundlage. Aufser der Mächtigkeit sind auch alle diejenigen formalen Begriffe arithmetischer Natur, die bereits in der Mengenlehre auftreten, und die wir als allgemeine Eigenschaften der Ordnungstypen geordneter Mengen kennen gelernt haben. Ihnen allen werden wir auch bei den Punktmengen wieder begegnen. Auf geometrischer Grundlage dagegen ruht der specifische Inhalt, den diese Begriffe dadurch erhalten, dafs die Punktmengen Bestandteile eines stetig ausgedehnten Raumes sind und daher an allen Eigenschaften Teil haben, die der empirisch gegebene geometrische Stetigkeitsbegriff resp. die im Raum mögliche Mafsbestimmung besitzt. (4, 5.)

Historisch liegen die Dinge so, dafs die Eigenschaften der Punktmengen den eigentlichen Anstofs zur theoretischen Ausgestaltung der Mengenlehre gegeben haben; insbesondere war es die Verteilung der Unstetigkeitspunkte einer Function, sowie anderer Punkte singulären Charakters, die hierzu die Veranlassung bieten mufste. Speciell ist Cantor selbst von dem Problem ausgegangen, die Eindeutigkeit der Coefficienten einer trigonometrischen Reihe auch für den Fall zu beweisen, dafs die Convergenz in unendlich vielen Punkten eines Intervalles aufhört. Er und P. du Bois-Reymond[1]) erkannten wohl zuerst, dafs die tiefere Analyse dieser Mengen es nahe legte, Grenzpunkte höherer Ordnung zu betrachten; du Bois gelangte sogar schon zur Idee eines Grenzpunktes unendlich hoher Ordnung[2]). Die methodische Betrachtung knüpft aber auch auf diesem Gebiet an Cantor an, resp. an den von ihm eingeführten Begriff der Ableitung[3]), der aus allen Grenzpunkten einer Punktmenge besteht und selbst wieder als Punktmenge aufgefafst wird. (2.)

Von den Resultaten der allgemeinen Mengenlehre ist es die oben S. 14 als möglich erkannte Menge M_ω, der auf dem Gebiet der Punktmengen eine grundlegende Bedeutung zukommt. Ist P

1) Journal f. Math. Bd. 79, S. 30 (1874).
2) Vgl. Math. Ann. Bd. 16, S. 128, Anmerkung.
3) Dieser Begriff wurde von Cantor 1872 eingeführt; vgl. Math. Ann. 5, S. 128 (1872).

eine beliebige Punktmenge, P_1 eine Teilmenge von P, ebenso P_2 eine Teilmenge von P_1 u. s. w., so ist es die durch die Gleichung

$$P_\omega = \mathfrak{D}(P, P_1, P_2, \cdots P_\nu, \cdots) = \mathfrak{D}\{P_\nu\}$$

definirte Menge, wo jedes $P_{\nu+1}$ eine Teilmenge von P_ν ist[1]) (1). Die Einführung dieser Menge sowie der aus ihr möglicherweise fliefsenden Teilmengen (3)

$$P_{\omega+1}, P_{\omega+2}, \cdots\cdots P_{\omega+\nu}, \cdots\cdots P_\alpha$$

ist es, die die feineren und tiefer liegenden Eigenschaften der Punktmengen ins Licht zu setzen gestattet hat[2]); hier ist die Stelle, wo die transfiniten Zahlen zum ersten Mal als ein durch die Natur der Dinge gefordertes objectives Hilfsmittel der mathematischen Forschung in die Erscheinung traten. Es ist das bleibende Verdienst Cantor's, in der Weiterbildung dieser Ideen ohne Scheu vor ihrer scheinbaren Paradoxie vorangegangen zu sein und dadurch die mathematische Denkweise um wichtige Begriffe und neue Methoden bereichert zu haben. Zuerst stark befehdet, haben seine Schöpfungen bewiesen, dafs sie für die wichtigsten Teile der Analysis und Geometrie ein ebenso notwendiges wie erfolgreiches Instrument darstellen.

1. Erscheint die Existenz der eben genannten Menge P_ω zunächst wieder nur als logisch möglich, so giebt es einen sehr allgemeinen Fall, in dem man im stande ist, ihre wirkliche Existenz in aller Form darzuthun, vorausgesetzt natürlich, dafs jedes P_ν aus unendlich vielen Punkten besteht. Nach einem bekannten Satz existirt für eine jede aus unendlich vielen Punkten eines C_ν bestehende Punktmenge P mindestens eine Stelle im C_ν, in deren Umgebung immer noch beliebig viele Punkte der Menge liegen. Diese Stelle, die man Grenzpunkt, Häufungspunkt, Verdichtungspunkt nennt, braucht der Menge P an und für sich nicht anzugehören. Wir wollen aber eine Punktmenge als abgeschlossen bezeichnen, falls jede ihrer Grenzstellen zu ihr gehört[3]), und beweisen nun folgenden Satz:

I. Bilden die abgeschlossenen Punktmengen P_1, P_2, $P_3, \cdots$ eine solche Reihe, dafs jedes $P_{\nu+1}$ in P_ν enthalten ist, so giebt es stets Punkte, die allen P_ν angehören.

---

1) Ein einfaches Beispiel ist das folgende. Sei

$$P = (1, {}^1/_2, {}^1/_3 \cdots\cdots 0), \quad P_\nu = (\frac{1}{\nu+1}, \frac{1}{\nu+2}, \cdots\cdots 0),$$

so existirt P_ω und besteht aus dem Nullpunkt. Wird dieser Nullpunkt aus P und somit aus allen Mengen P_ν getilgt, so existirt ein P_ω nicht.

2) Diese Einführung geschah in Math. Ann. 17, S. 357 ff. (1880).

3) In Übereinstimmung mit der Definition auf S. 32.

Sei nämlich p_1 ein Punkt von P_1, p_2 ein solcher von P_2 u. s. w., so wird auf diese Weise eine Punktmenge

$$\{p_\nu\} = p_1, p_2, p_3, \cdots p_\nu, \cdots\cdots$$

definirt, deren sämtliche Punkte P_1 angehören. Diese Menge besitzt mindestens einen Grenzpunkt p_ω, der, da P_1 abgeschlossen ist, ebenfalls P_1 angehört. Dieser Grenzpunkt gehört aber auch jedem P_ν an, denn er ist auch Grenzpunkt der Menge

$$p_\nu, p_{\nu+1}, p_{\nu+2}, \cdots\cdots,$$

deren sämtliche Punkte Punkte von P_ν sind. Damit ist die Existenz von Punkten, die allen P_ν angehören, nachgewiesen.

2. Nun sei P irgend eine aus unendlich vielen Punkten des C_ν bestehende Menge, so bilden auch ihre Grenzpunkte, gleichgültig ob sie der Menge P angehören oder nicht, eine Punktmenge; diese ist es, die Cantor Ableitung[1]) von P genannt und durch P' bezeichnet hat[2]). Enthält P' unendlich viele Punkte, so kann man auch für sie die Ableitung bilden; sie heifst die zweite Ableitung P'' von P. Während P' Punkte enthalten kann, die P nicht angehören[3]), ist dies für P'' in Bezug auf P' nicht der Fall. Es besteht nämlich der wichtige Satz:

II. Alle Punkte der zweiten Ableitung P'' gehören auch der ersten Ableitung P' an.

Ist nämlich p'' Punkt von P'', so liegen in seiner Umgebung unendlich viele Punkte p'; da aber in jeder Nähe jedes p' wieder Punkte p von P selbst liegen, so ist p'' auch Grenzpunkt von P.

Während also beim Fortgang von P zu P' neue Punkte auftreten können, gehen beim Fortgang von P' zu P'' höchstens Punkte verloren. Enthält nun auch P'' unendlich viele Punkte, so läfst sich der Procefs des Ableitens weiter fortsetzen. Es ergeben sich so die Ableitungen P', P'', P''', $\cdots$ $P^{(\nu)}$, und immer besteht der Satz, dafs alle Punkte von $P^{(\nu+1)}$ auch Punkte von $P^{(\nu)}$ sind. Jede dieser Ableitungen ist daher eine abgeschlossene Menge. Nun sind bei diesem fortgesetzten Ableitungsprocefs nur zwei Fälle möglich. Entweder wir gelangen einmal zu einer Ableitung $P^{(\nu)}$, die nur eine endliche Anzahl von Punkten enthält, dann enthält $P^{(\nu+1)}$ keinen Punkt mehr, was wir durch

1) Math. Ann. 5, S. 128 (1872).

2) Es kann vorkommen, dafs für einen Grenzpunkt nur links oder rechts Punkte von P existiren. Man kann demgemäfs eine linksseitige und eine rechtsseitige Ableitung unterscheiden uud damit weiteroperiren. In dieser Weise haben Peano und seine Schüler, besonders Burali-Forti die Sätze über Punktmengen darzustellen begonnen, ohne dafs jedoch Resultate vorliegen, die über diejenigen Cantor's wesentlich hinausgingen. Vgl. z. B. das Peano'sche Vocabulario.

3) So besteht z. B. die Ableitung der Menge aller rationalen Punkte eines Intervalls aus allen Punkten derselben.

$$P^{(\nu+1)} = 0$$

ausdrücken wollen. Mengen dieser Art sind als Mengen erster Gattung und ν-ter Art bezeichnet worden[1]). Oder aber es besteht jedes $P^{(\nu)}$ aus unendlich vielen Punkten. Alsdann erfüllt aber die Reihe der Ableitungen

$$P', P'', P''', \dots P^{(\nu)}, \dots$$

die Bedingungen des obigen Satzes, und es giebt daher eine ihnen allen gemeinsame Menge, die wir als ω-te Ableitung $P^{(\omega)}$ bezeichnen[2]); es ist also

$$P^{(\omega)} = \mathfrak{D}(P', P'', P''', \dots) = \mathfrak{D}\{P^{(\nu)}\}.$$

Wir werden sehr bald Beispiele von Punktmengen aufstellen, für die $P^{(\omega)}$ existirt, insbesondere sogar solche, für die $P^{(\omega)}$ selbst wieder aus unendlich vielen Punkten besteht. In diesem Fall läſst sich zeigen, daſs auch $P^{(\omega)}$ ihre sämtlichen Grenzpunkte enthält. Sind nämlich $q_1, q_2, q_3, \dots$ Punkte von $P^{(\omega)}$, und ist q_ω ihr Grenzpunkt, so gehören gemäſs der Definition von $P^{(\omega)}$ die Punkte $q_1, q_2, q_3, \dots$ auch jeder Menge $P^{(\nu)}$ an. Es gehört daher auch q_ω jedem $P^{(\nu)}$ und damit auch $P^{(\omega)}$ an. Wir können demnach folgenden Satz aussprechen:

III. Enthält jede der Ableitungen $P', P'', \dots$ unendlich viele Punkte, so giebt es stets mindestens einen Punkt, der allen diesen Ableitungen gemeinsam ist. Die Gesamtheit aller dieser Punkte bildet die Ableitung $P^{(\omega)}$, die ebenfalls jeden ihrer Grenzpunkte enthält.

3. Auf Grund dieses Satzes ergiebt sich sofort eine unbegrenzte Perspective für die Fortsetzung des Ableitungsprocesses; man gelangt so zu einer fortschreitenden Reihe von Ableitungen, deren Indices die transfiniten Ordnungszahlen sind. Es beruht dies darauf, daſs der Satz, wonach jede Ableitung, die unendlich viele Punkte enthält, eine abgeschlossene Menge ist, sowohl den Schluſs von ν auf $\nu + 1$, wie auch den Schluſs von $\{\alpha_\nu\}$ auf α_ω zuläſst. Ist nämlich $P^{(\alpha)}$ abgeschlossen, so ist dies nach dem obigen auch für $P^{(\alpha+1)}$ der Fall, falls $P^{(\alpha+1)}$ aus unendlich vielen Punkten besteht. Ist andererseits jede der Ableitungen

$$P^{(\alpha)}, P^{(\alpha_1)}, P^{(\alpha_2)} \dots P^{(\alpha_\nu)}, \dots$$

abgeschlossen und in der vorhergehenden enthalten, so folgt genau wie oben, daſs es erstens Punkte giebt, die allen diesen Ableitungen gemeinsam sind, daſs sie zweitens, falls es unendlich viele Punkte

1) Vgl. Cantor in Math. Ann. 5, S. 129, sowie Dini, Grundlagen etc., S. 23.

2) Die Menge $P^{(\omega)}$ erscheint bei Cantor zuerst in Math. Ann. 17, S. 357, vgl. auch Cap. V dieses Abschnitts.

sind, eine abgeschlossene Menge $P^{(\beta)}$ bilden, und daſs endlich $\beta = \alpha_\omega$ ist. Wir sprechen dies noch folgendermaſsen als Satz aus:

IV. Bilden die Ordnungszahlen $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \cdots$ eine Fundamentalreihe $\{\alpha_\nu\}$, und enthält jede Ableitung $P^{(\alpha_\nu)}$ unendlich viele Punkte, so giebt es mindestens einen Punkt, der allen diesen Ableitungen gemeinsam ist. Die Gesamtheit aller dieser Punkte bildet eine Ableitung $P^{(\beta)}$, die ebenfalls abgeschlossen ist, und zwar ist β die Limeszahl der Reihe $\{\alpha_\nu\}$. Es ist also

$$P^{(\beta)} = \mathfrak{D}\,(P^{(\alpha_1)}, P^{(\alpha_2)}, P^{(\alpha_3)}, \ldots) = \mathfrak{D}\{P^{(\alpha_\nu)}\}.$$

Betrachten wir endlich die sämtlichen Ableitungen, deren Ordnungen die Zahlen der zweiten Zahlklasse sind, also

$$P, P', P'', \ldots P^{(\omega)}, \ldots\ldots P^{(\alpha)}, \ldots\ldots$$

Sind sie alle von Null verschieden, so folgt auf die gleiche Art, daſs es Punkte giebt, die ihnen allen gemeinsam sind; wir nennen ihre Gesamtheit mit Cantor P^{Ω}, und es enthält auch P^{Ω} die sämtlichen Grenzpunkte. Umgekehrt folgt daraus sofort, daſs, falls $P^{\Omega} = 0$ ist, nicht alle $P^{(\alpha)}$ von Null verschieden sein können[1]). Es giebt dann notwendig eine erste Ableitung, die Null ist. Aus den vorstehenden Sätzen folgt noch weiter, daſs die zugehörige Ordnungszahl keine Limeszahl sein kann. Denn wäre $P^{(\beta)}$ die erste Ableitung, die Null ist, und $\beta = \text{Lim}\,\alpha_\nu$, so müſste $P^{(\alpha_\nu)}$ für jedes α_ν von Null verschieden sein, und das gleiche folgte daher für $P^{(\beta)}$. Wir erhalten also:

V. Ist $P^{(\alpha)}$ die erste Ableitung, die Null ist, so ist α keine Limeszahl.

Ist $P^{\Omega} = 0$, so giebt es auch bereits eine Ableitung $P^{(\alpha)}$, die Null ist.

Ich erwähne endlich noch einige formale Sätze über Ableitungen, deren wir später bedürfen. Wird die Menge P in P_1 und P_2 zerlegt, so ist jeder Punkt von P', der nicht Grenzpunkt von P_1 ist, notwendig Grenzpunkt von P_2, und umgekehrt. Es besteht also der Satz[2]):

$$\text{Ist } P = P_1 + P_2, \text{ so ist } P' = \mathfrak{M}(P_1' + P_2').$$

Dieser Satz gilt auch, falls P in eine beliebige endliche Zahl von Teilmengen zerspalten wird. Ist dagegen die Zahl der Teilmengen überendlich, so gilt er nicht mehr. Alsdann kann es nämlich Grenzpunkte p' geben, zu Punktfolgen gehörig, die Punkte eines jeden P_ν enthalten. Bezeichnen wir die Gesamtheit aller dieser Punkte p' durch P_ω, so folgt:

---

1) Auch dieser Schluſs beruht auf der S. 14 erwähnten Antithese.

2) Für die Bezeichnung vgl. man S. 6.

VI. Besteht P aus unendlich vielen verschiedenen Teilmengen P_ν, d. h. ist $P = \{P_\nu\} = \Sigma P_\nu$, so ist[1])

$$P' = \mathfrak{M}(\Sigma P'_\nu + P_\omega).$$

Es bedarf wohl kaum des besonderen Hinweises, dafs die vorstehenden Sätze, die wir für Ableitungen ausgesprochen haben, ebenso für jede Art von abgeschlossenen Mengen gelten, die den Bedingungen von Satz I genügen; ist ja dieser Satz die ausschliefsliche Quelle der abgeleiteten Resultate. Wir erkennen also die allgemeine Möglichkeit einer Reihe abgeschlossener Mengen

$$P_1, P_2, P_3, \cdots P_\omega, P_{\omega+1}, \cdots P_{\omega^2}, \cdots P_\alpha, \cdots P_\Omega,$$

deren jede eine Teilmenge aller vorhergehenden ist. Insbesondere gilt also auch in diesem Fall, dafs, falls $P_\Omega = 0$ ist, bereits eine erste Menge P_α existirt, die Null ist, wo α keine Limeszahl sein kann[2]).

4. Ein Punkt p einer Punktmenge P, der kein Grenzpunkt ist, heifst isolirter Punkt; jeder Punkt einer Menge ist also entweder Grenzpunkt oder isolirter Punkt, und wir setzen

$$P = P_i + P_g,$$

wo P_i die isolirten Punkte P enthält und P_g die übrigen Punkte[3]). Alle Punkte der Menge P_g sind Grenzpunkte und daher zugleich Punkte von P', es kann aber P' noch andere Punkte enthalten, als die von P_g. Nach dem Verhältnis von P_g und P_i zu P und P' sind die Mengen von Cantor mit Namen belegt worden[4]). Ist zunächst $P_g = 0$, also $P = P_i$, so heifst P eine isolirte Menge; ist $P_g = P'$, so dafs die Menge jeden ihrer Grenzpunkte enthält, so heifst sie, wie bereits oben S. 58 angegeben, abgeschlossen. Ist $P_i = 0$, so heifst die Menge in sich dicht, es ist alsdann jeder ihrer Punkte ein Grenzpunkt. Ist endlich $P_i = 0$ und $P_g = P'$, also $P = P'$, so heifst die Menge perfect[5]); sie ist alsdann ab-

1) Besteht z. B. P_1 aus dem Punkt 1, P_2 aus dem Punkt $1/2$, ebenso P_ν aus dem Punkt $\frac{1}{\nu}$, so ist jedes $P_\nu' = 0$, während sich für P_ω der Nullpunkt ergiebt.

2) Vgl. O. Baire in Ann. di mat. (3) Bd. 3, S. 50.

3) Vgl. auch S. 71.

4) Vgl. Math. Ann. 21, S. 52; 21, S. 575; 23, S. 470 ff. Ein Beispiel einer isolirten Menge liefert

$$P = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \cdots\right) = \left\{\tfrac{1}{n}\right\},$$

falls diese Menge den Nullpunkt nicht enthält, während sie abgeschlossen wird, sobald man den Nullpunkt hinzufügt.

5) Jordan (Cours etc. 1, S. 19) gebraucht das Wort parfait, wo Cantor abgeschlossen sagt; Borel unterscheidet relativement parfait und absolument parfait (Leçons etc., S. 36).

geschlossen und in sich dicht. Sie kann auch so definirt werden, dafs sie mit ihrer Ableitung identisch ist.

Die rationalen Punkte eines Intervalls oder Gebiets bilden z. B. eine in sich dichte Menge, die aber nicht perfect ist, dagegen stellt jedes Continuum eine perfecte Menge dar. Man erkennt auch leicht die Richtigkeit der folgenden Sätze:

VII. Ist die Menge P perfect, also $P = P'$, so ist auch $P' = P''$ u. s. w.

Die Ableitung einer in sich dichten, nicht perfecten Menge ist perfect[1]).

Nur der letzte Satz bedarf eines Beweises. Ist die Menge P in sich dicht, so ist sie Teilmenge von P'; es ist also jeder Punkt von P' auch Punkt von P''. Andererseits ist aber jeder Punkt von P'' auch Punkt von P', und daraus folgt, dafs $P' = P''$ ist.

Eine letzte geometrische Eigenschaft, die für Punktmengen in Betracht kommt, ist die Art, wie sie einen Bereich H erfüllen. Eine Punktmenge P heifst nämlich in einem Bereich H überall dicht[2]), falls in jedem Teilbereich von H Punkte der Menge enthalten sind; sie heifst nirgends dicht in H, falls keine Teilmenge von P überall dicht bezüglich H ist, so dafs es in jedem Teilbereich von H Bereiche H' giebt, deren Inneres von Punkten der Menge frei ist. Eine überall dichte Punktmenge ist auch in sich dicht, während das umgekehrte nicht der Fall zu sein braucht. Zerfällt die Menge P in die Teilmengen P_1 und P_2, so heifsen sie Complementärmengen bezüglich P.

Die überall dichten Mengen haben eine einfache Eigenschaft, die ich noch anführe; für sie besteht der Satz:

VIII. Ist eine Punktmenge in einem Bereich H überall dicht, so besteht ihre Ableitung aus allen Punkten von H.

Man kann diese Eigenschaft übrigens auch als Definition der überall dichten Mengen benutzen[3]).

5. Wie bereits S. 57 bemerkt, sind die vorstehenden Definitionen in voller Übereinstimmung mit denjenigen, die wir früher für die Ordnungstypen einfach geordneter Mengen ausführlich dargelegt haben, und die auch auf Ordnungstypen mehrfach geordneter Mengen übertragbar sind. Sie bestätigen die oben (S. 32) gemachten Ausführungen über den arithmetischen Charakter dieser Begriffe; diejenigen, die für Punktmengen gelten, erscheinen als specieller Fall der allgemeineren, in ihrer Eigenart bedingt durch die Natur des stetigen Raumes. Um diese Analogie, sowie aber auch den Unterschied zwischen den Ordnungstypen und den Punktmengen noch weiter

1) Math. Ann. 23, S. 471.

2) Diese Bezeichnung erscheint bei Cantor zuerst in Math. Ann. 15, S. 2 (1879); du Bois sagt pantachisch, vgl. Math. Ann. 15, S. 287.

3) So verfährt z. B. R. Baire, Ann. d. mat. (3) 3, S. 29.

aufzuhellen, weise ich auf eine Thatsache hin, der zuerst Harnack Ausdruck gegeben hat[1]). Man kann das Linearcontinuum auf eine nirgends dichte Menge einer Geraden so abbilden, dafs beide Mengen ähnlich geordnet sind. Zu einer solchen Abbildung gelangt man übrigens am einfachsten, indem man von der Decimalbruchdarstellung jeder Zahl ausgeht und den einzelnen Stellen gewisse Beschränkungen auferlegt[2]); beispielsweise auch so, dafs man jeden Punkt p der Einheitsstrecke durch einen dyadischen Bruch

$$x = 0,\ a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_\nu \cdots\cdots \quad a_\nu = 0 \text{ oder } 1$$

darstellt (vgl. S. 24) und diesen Bruch alsdann im Decimalsystem liest; er stellt dann eine Zahl y dar, der ein Punkt q einer zweiten Einheitsstrecke entspricht[3]). Falls nun jeder Bruch x eine unendliche Zahl von Einsen enthält, so wird ein jeder Punkt p genau einmal dargestellt, und wir erhalten in der Menge $Q = \{q\}$ ein Abbild des Continuums von der angegebenen Art. Die Menge Q ist als Punktmenge des stetigen Raumes nicht perfect; ihr Ordnungstypus dagegen ist wohl perfect, da ja ähnliche Mengen den gleichen Ordnungstypus besitzen. So ist z. B. die Strecke $0{,}011\cdots$ bis $0{,}1$ von Punkten von Q frei, und zwar gehört der linke Endpunkt der Menge Q an, der rechte jedoch nicht, während in jeder Nähe rechts von $0{,}1$ Punkte von Q liegen, so dafs der Punkt $0{,}1$ ein Grenzpunkt von Q ist. Für die Menge Q erscheint überdies der Punkt $0{,}0111\cdots$ nur als einseitiger Grenzpunkt, für den Ordnungstypus dagegen liefert er ein beiderseitiges Grenzelement, da zwischen ihm und jedem rechts von ihm gelegenen Punkt immer noch andere Punkte liegen, die der Menge Q angehören.

Die nämliche Abbildung läfst sich für die Punkte einer Fläche oder eines begrenzten Raumteils durchführen und würde hier in analoger Weise die Analogie und zugleich den Unterschied zwischen den Punktmengen und den bezüglichen Ordnungstypen erläutern.

In dieser Hinsicht bemerke ich endlich, dafs R. Baire die obigen allgemeinen Begriffe kürzlich auch auf Mengen geordneter Mengen ausgedehnt hat, die endlich oder vom Typus ω sind. Sind

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ \cdots\cdots E_\nu,\ \cdots$$

Mengen dieser Art, so dafs jedes $E_{\nu+1}$ mit E_ν in den ersten ν Elementen übereinstimmt, so wird die Menge E Grenzelement aller $\{E_\nu\}$ genannt, falls E mit jedem E_ν in mindestens den ersten ν Elementen übereinstimmt. Infolge dieser Begriffsbestimmung

1) Math. Ann. 23, S. 285.

2) Gesetze dieser Art hat Peano vielfach benutzt; vgl. Riv. di Mat. Bd. 2, S. 43.

3) Die obige Idee benutzte der Verfasser in Gött. Nachr. 1896, S. 255. Die allgemeinste Art einer derartigen Abbildung behandelt Bettazzi in Ann. di mat. (2) 16, S. 49. Er berichtigt darin einen Irrtum Harnack's.

lassen sich die Charaktere der Punktmengen auch auf diese Mengen übertragen. R. Baire wendet dies besonders auf den Fall an, dafs die E_ν Mengen beliebig geordneter Zahlen sind, also Reihen von Zahlen, die keine Fundamentalreihen zu sein brauchen[1]).

Zweites Capitel.

Die Mächtigkeit der Punktmengen.

Auf die Frage nach der Mächtigkeit p einer Punktmenge[2]) P läfst sich noch nicht in jedem Fall eine sichere Antwort geben. Wie bereits erwähnt, hat man thatsächlich bisher nur Mengen kennen gelernt, deren Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{c}$ ist; doch kann selbst die Frage, wann einer Menge die eine oder die andere Mächtigkeit zukommt, nicht vollständig beantwortet werden (1). Dies ist nur der Fall, wenn die Menge P abgeschlossen ist. Um zu allgemeinen Sätzen über Punktmengen beliebiger Art zu gelangen, hat Cantor mit Rücksicht darauf, dafs die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Continuums noch nicht geklärt ist, seine Untersuchungen später so modificirt, dafs er Mengen jeder Mächtigkeit zuläfst und eine gegebene Menge in homogene, in sich dichte Bestandteile verschiedener Mächtigkeit zerlegt (5).

Die Sätze und Formeln, welche die abgeschlossenen Mengen betreffen (2), gehen aufser auf Cantor[3]) auch auf J. Bendixson[4]) zurück, der einen Teil von ihnen selbständig gefunden und sogar vor Cantor publicirt hat. Die Grundlagen, auf denen ihre Beweise beruhen, gehören jedoch ohne Ausnahme in den Kreis der allgemeinen Cantor'schen Ideen (3). Aufser dem Mächtigkeitsbegriff bilden die Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse das für sie notwendige und zugleich ausreichende Hilfsmittel, insbesondere der Satz, dafs ihre Gesamtheit eine Menge der zweiten Mächtigkeit darstellt. Doch aber besteht das merkwürdige Resultat, dafs in den von Cantor abgeleiteten Summenformeln, die formal eine nicht abzählbare Menge von Summanden enthalten, diese Summe in allen Fällen nach einer abzählbaren Menge von Gliedern abbricht, so dafs der Begriff der zweiten Mächtigkeit aus den Endformeln doch wieder verschwindet. Einem von diesem Begriff unabhängigen Beweise begegnen wir später (S. 81).

1. Am frühesten war die Mächtigkeit der isolirten und perfecten Mengen bekannt. Es bestehen die Sätze[5]):

---

1) Compt. rend. de l'Ac. des Sc. Bd. 129, S. 946 (1899).
2) Wir denken uns die Menge P stets ganz im Endlichen liegend.
3) Math. Ann. Bd. 23, S. 463 ff.
4) Acta math. Bd. 2, S. 415.
5) Für die beiden ersten Sätze vgl. Math. Ann. 21, S. 52; der Beweis des dritten Satzes findet sich in Math. Ann. 23, S. 459.

I. **Jede isolirte Menge ist abzählbar.**

Ist nämlich p ein Punkt der Menge, so läfst sich um ihn eine Kugel legen, die keinen Punkt der Menge enthält, und dies so, dafs alle Kugeln aufserhalb von einander liegen. Da nun diese Kugeln gemäfs S. 11 abzählbar sind, so ist es auch die Punktmenge. Eine Folgerung dieses Satzes lautet:

II. **Ist P' abzählbar, so ist auch P abzählbar.**

Dies ergiebt sich auf Grund der Gleichung $P = P_i + P_g$, wenn man beachtet, dafs P_g eine Teilmenge von P' ist. Denn da P_i und P_g abzählbar sind, so ist es auch P selbst.

III. **Eine abzählbare Menge ist niemals perfect, und umgekehrt.**

Dieser Satz wird genau so bewiesen, wie die ihm analogen Sätze von S. 19 u. 47. Es sei

$$P = \{p_\nu\} = p_1, p_2, p_3, \cdots p_\nu, \cdots$$

die bezügliche abzählbare Menge. Wäre sie perfect, so wäre jeder ihrer Punkte ein Grenzpunkt.

Man lege nun um p_1 eine Kugel K_1, so enthielte sie, da p_1 ein Grenzpunkt wäre, unendlich viele Punkte von P, die wir als Punktmenge P_1 bezeichnen. Der erste Punkt der obigen Reihe, der auch Punkt von P_1 ist, sei p_λ. Um ihn lege man eine Kugel K_λ, die ganz **innerhalb** von K_1 liegt, so enthielte sie eine aus unendlich vielen Punkten bestehende Teilmenge von P_1, die P_λ heifsen möge. Der erste Punkt der Reihe, der zu P_λ gehört, sei p_μ, so folgt, da jeder Punkt von P_λ auch Punkt von P_1 ist, dafs $\mu > \lambda$ ist. So kann man fortfahren; läfst man die Radien der Kugeln H_1, $H_\lambda, \cdots$ gegen Null abnehmen, so erhält man eine Reihe von Punkten, $p_1, p_\lambda, p_\mu, \cdots$, die gegen einen Grenzpunkt p_ω convergiren. Dieser Grenzpunkt gehört einerseits der Menge an, andererseits kann er in obiger Reihe nicht enthalten sein, was ebenso geschlossen wird, wie im Beweis des analogen Satzes auf S. 19. Damit ist der Satz bewiesen, ebenso aber auch die mit ihm gleichwertige Umkehrung, dafs eine perfecte Menge nicht abzählbar ist.

2. Die wichtigsten Kriterien für die Beurteilung der Mächtigkeit $\mathfrak{p}$ einer Punktmenge ergeben sich aus zwei allgemeinen Formeln, die **Cantor** aufgestellt hat. Die erste giebt eine Darstellung der Ableitung P' einer Menge; da P'' Teilmenge von P' ist (S. 59), so läfst sich setzen (S. 62)

$$P' = P_i' + P_g' = P_i' + P'',$$

und zwar stellt P_i' die isolirten Punkte von P' dar[1]), die beim Fortgang von P' zu P'' verloren gehen. Dieselbe Zerlegung läfst sich

1) P_i' und P_g' sind also hier nicht die Ableitungen von P_i und P_g.

nun auch auf P'', dann auf P''' u. s. w. anwenden; man gelangt so zunächst zu der Formel

$$P' = \sum_{\lambda=1,\cdots\nu-1} P_i^{(\lambda)} + P^{(\nu)},$$

in der, wie immer, ν endlich ist. Diese Formel läfst sich aber auch auf transfinite Ordnungszahlen ausdehnen; mit andern Worten, sie gestattet auch den Schlufs von $\{\nu\}$ auf ω, vorausgesetzt natürlich, dafs Ableitungen transfiniter Ordnung existiren. Ein Punkt von P' gehört nämlich entweder $P^{(\omega)}$ an, oder nicht; gehört er $P^{(\omega)}$ nicht an, so giebt es eine erste Ableitung $P^{(\nu)}$, die ihn nicht mehr enthält, resp. eine Ableitung $P^{(\nu-1)}$, der er als isolirter Punkt angehört. Dieser Thatbestand findet seinen Ausdruck in der Formel

$$P' = \sum_{\lambda=1,2,3,\cdots<\omega} P_i^{(\lambda)} + P^{(\omega)}.$$

Man kann nun wieder $P^{(\omega)}$ in der gleichen Weise zerlegen wie die vorhergehenden Ableitungen und gelangt so durch fortgesetzte Anwendung des Schlusses von ν auf $\nu+1$ und von $\{\alpha_\nu\}$ auf α_ω schliefslich zu der Gleichung

(1) $$P' = \sum_{\beta=1,2,\ldots\omega,\ldots<\alpha} P_i^{(\beta)} + P^{(\alpha)},$$

die in dem Fall, dafs Ableitungen $P^{(\alpha)}$ für jede Zahl α der zweiten Zahlklasse existiren, die Form

(2) $$P' = \sum_{\beta=1,2,\ldots\omega,\ldots\alpha,\ldots\Omega} P_i^{(\beta)} + P^{(\Omega)} = R + S$$

annimmt[1]).

Die vorstehende Formel gilt übrigens auch für den Fall, dafs nicht alle $P^{(\alpha)}$ von Null verschieden sind; denn alsdann haben alle Ableitungen, von einer bestimmten an, den Wert Null, und die Formel geht von selbst in eine der vorhergehenden über. Wir können auf diese Weise die Formel (2) als für jede Punktmenge P giltig ansehen.

3. An diese Formel knüpfen wir nun folgende Betrachtungen. Wir scheiden zunächst die zwei Fälle, dafs P^{Ω} den Wert Null hat oder nicht. Ist zunächst $P^{\Omega} = 0$, so sind nicht alle $P^{(\alpha)}$ von Null verschieden, und es existirt, da es für jede Menge von Ordnungszahlen eine erste giebt, notwendig eine erste Ableitung $P^{(\alpha)}$, die Null ist. Alsdann enthält die rechte Seite von (2) nur eine endliche oder doch abzählbare Menge von Summanden. Jeder dieser Summanden stellt eine isolirte Menge dar, und daraus folgt gemäfs Satz I, dafs die gesamte Menge, d. h. also auch P' abzählbar ist. Nach Satz II ist daher auch P selbst abzählbar. Also folgt:

1) Für diese Formeln und die an sie anschliefsenden Sätze vgl. Math. Ann. 23, S. 463 ff., sowie die S. 65 citirte Arbeit von Bendixson. Für den einfachsten Fall findet sich die Formel schon in Math. Ann. 21, S. 53.

IV. Ist $P^{\Omega} = 0$, so sind P' und P abzählbar, und:

Giebt es ein α der ersten oder zweiten Zahlklasse, so dafs $P^{(\alpha)} = 0$ ist, so ist P' und damit auch P abzählbar.

Diese Sätze lassen auch die Umkehrung zu; nämlich es besteht auch der Satz:

V. Ist P' abzählbar, so ist $P^{\Omega} = 0$, und es giebt ein erstes α der ersten oder zweiten Zahlklasse, so dafs $P^{(\alpha)} = 0$ ist.

Wäre nämlich P^{Ω} nicht Null, so könnten an sich noch zwei Fälle eintreten. Es kann entweder jeder Summand der Formel (2) von Null verschieden sein; alsdann würde aber die Menge dieser Summanden eine Menge der zweiten Mächtigkeit darstellen, und P' könnte nicht abzählbar sein. Wäre andererseits irgend ein Summand gleich Null, so hätte man für das bezügliche α $P_i^{(\alpha)} = 0$, also $P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+1)}$, die Menge $P^{(\alpha)}$ müfste also perfect sein. Alsdann folgt auch $P^{\Omega} = P^{(\alpha)}$, und da eine perfecte Menge nicht abzählbar ist, so würde wieder folgen, dafs auch P' nicht abzählbar sein kann. Damit ist der Satz bewiesen.

4. Wir erörtern jetzt den zweiten Hauptfall, dafs P^{Ω} von Null verschieden, also P' nicht abzählbar ist. Aus dem Vorstehenden folgt bereits, dafs alsdann entweder alle Summanden der rechten Seite von Null verschieden sind, oder aber bereits ein erstes α existirt, so dafs $P^{(\alpha)}$ perfect ist. Wir werden zeigen, dafs nur die zweite Möglichkeit zulässig ist. Zuvor beweisen wir folgende zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1. Ist die Menge P^{Ω} von Null verschieden, so ist sie perfect[1]).

Da P^{Ω} eine abgeschlossene Menge ist, so ist nur zu zeigen, dafs sie keine isolirten Punkte enthält. Enthielte P^{Ω} einen isolirten Punkt s, so liefse sich um s eine Kugel H legen, die keine weiteren Punkte von P^{Ω} enthält. Sei Q diejenige Teilmenge von P', die innerhalb H enthalten ist. Wir construiren nun um s eine Reihe einander einschliefsender Kugeln H_1, H_2, H_3, $\cdots$, die gegen den Punkt s als Grenzpunkt convergiren, und bezeichnen die zwischen $H_{\nu-1}$ und H_ν liegende Teilmenge von Q durch Q_ν, und zwar sollen Q_ν auch die etwa auf der Oberfläche von H_ν liegenden Punkte angehören. Alsdann ist

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots\cdots + s.$$

Nun ist zunächst klar, dafs jedes $Q_\nu^{\Omega} = 0$ ist; denn da Q_ν Teilmenge von P' ist, so ist ein Punkt von Q_ν^{Ω} auch Punkt von P^{Ω},

1) Math. Ann. 23, S. 465; vgl. auch J. Bendixson in Acta math. 2, S. 419. Den hier folgenden Beweis des zweiten Hilfssatzes gab E. Phragmén in Acta math. 5, S. 47; er stellt den einfachsten Fall eines allgemeineren von Cantor herrührenden Satzes dar; vgl. Math. Ann. 23, S. 457.

andererseits liegt aber innerhalb K nur der eine Punkt s von P^{Ω}, der wiederum nicht Punkt von Q_ν ist. Es ist mithin jedes Q_ν von der ersten Mächtigkeit, und demnach müfste es auch Q selbst sein. Andererseits wissen wir aber, dafs $Q^{\Omega} = s$ ist, also Q nicht abzählbar sein kann; damit ist gezeigt, dafs P^{Ω} keine isolirten Punkte enthält.

Hilfssatz 2. Die Menge $R = \Sigma P_i^{(\beta)}$ ist abzählbar.

Da die Menge P^{Ω} ihre Grenzpunkte enthält, so giebt es für jeden Punkt r von R eine von Null verschiedene untere Grenze seiner Abstände von allen Punkten von P^{Ω}; sie sei ϱ und heifse Abstand des Punktes r von P^{Ω}[1]. Nun werde eine Reihe von Gröfsen

$$\delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \cdots\cdots > \delta_\nu > \cdots$$

mit $\lim \delta_\nu = 0$ ins Auge gefafst, und es sei R_ν diejenige Teilmenge von R, deren Punkte der Bedingung

$$\delta_\nu \geqq \varrho > \delta_{\nu+1}$$

genügen, so dafs auch für die Punkte von R_ν' die untere Grenze ihrer Abstände von den Punkten von P^{Ω} nicht kleiner als $\delta_{\nu+1}$ ist, so ist

$$R = R_0 + R_1 + R_2 + \cdots,$$

und man zeigt wieder leicht, dafs $R_\nu{}^{\Omega} = 0$, also R_ν abzählbar ist. Wäre nämlich $R_\nu{}^{\Omega}$ nicht Null, so würde doch ein Punkt s_ν von $R_\nu{}^{\Omega}$ auch der Menge R_ν' angehören, und es müfste für ihn die untere Grenze seiner Abstände von den Punkten von P^{Ω} von Null verschieden sein, was einen Widerspruch darstellt.

Da demnach R von der ersten Mächtigkeit ist, so folgt, dafs in der Gleichung $R = \Sigma P_i{}^{(\beta)}$ die von Null verschiedenen Summanden selbst eine Menge der ersten Mächtigkeit bilden. Sie können daher nicht alle von Null verschieden sein, und es giebt mithin ein erstes α, so dafs $P_i{}^{(\alpha)} = 0$, also $P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+1)}$ ist. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

VI. Ist P' nicht abzählbar, so giebt es eine erste Zahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse, so dafs $P^{(\alpha)}$ eine perfecte Menge ist[2].

Wir können die erhaltenen Resultate im Zusammenhang auch folgendermafsen aussprechen:

Hauptsatz. Ist die Menge P' abzählbar, so kann sie durch fortgesetzte Abtrennung isolirter Mengen allmählich erschöpft werden; man gelangt durch diese Abtrennung nach einer endlichen oder abzählbaren Menge von Schritten zu einer ersten Ableitung $P^{(\alpha)}$, die Null

1) Vgl. auch Jordan, Journ. de math. (4) Bd. 8, S. 74.
2) Math. Ann. 23, S. 467.

ist. Ist P' nicht abzählbar, so kann zwar die successive Abtrennung der bezüglichen isolirten Mengen ebenfalls noch vorgenommen werden; und auch für sie führt dieser Abtrennungsprocefs nach einer abzählbaren Menge von Schritten zu einem Ende; aber in diesem Fall führt der Procefs zuletzt zu einer perfecten Menge $P^{(\alpha)}$, die sich allen Reductionsprocessen gegenüber als unzugänglich erweist. Die in diesen Satz eingehende Zahl α soll die für P charakteristische Zahl heifsen.

Das vorstehende Resultat kann als das wichtigste Ergebnis allgemeinerer Natur aus der Theorie der Punktmengen betrachtet werden.

Die Menge R, die bei dem Reductionsprocefs von P' auf $S = P^{\Omega}$ allmählich abgespalten wird, bezeichnet Cantor als reductible Menge[1]). Von ihr beweisen wir noch folgenden von J. Bendixson aufgestellten Satz[2]):

VII. Die Mengen R und $R^{(\alpha)}$ enthalten keine gemeinsamen Punkte; es ist $\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)}) = 0$.

Da nämlich R und S keine gemeinsamen Punkte enthalten, so folgt dies auch für R und $P^{(\alpha)}$, wenn α die bezügliche Zahl des obigen Satzes ist, also erst recht auch für R und $R^{(\alpha)}$, da ja $R^{(\alpha)}$ entweder eine Teilmenge von $P^{(\alpha)}$ oder höchstens gleich $P^{(\alpha)}$ ist.

5. Die vorstehenden Formeln leiden insofern an einem Mangel, als in ihnen nicht P, sondern P' auftritt; sie bestimmen daher nur die Mächtigkeit von P' und nicht die von P. Schon das einfache Beispiel der rationalen Zahlen, deren Ableitung das Continuum ist, zeigt aber, dafs sich die Mächtigkeit beim Fortgang von P zu P' erheblich ändern kann. Sätze oder Methoden, nach denen sich die Mächtigkeit einer beliebigen Menge P beurteilen läfst, besitzen wir noch nicht. Cantor hat allerdings auch Formeln abgeleitet, die sich auf beliebige Mengen beziehen; diese Formeln betreffen aber mehr die Analyse der inneren Structur einer Menge, unter Voraussetzung ihrer Mächtigkeit, als dafs sie diese selbst erkennen liefsen. Sie beruhen darauf, dafs die Teilmenge P_i abzählbar ist, und dafs daher die Mächtigkeit von P mit derjenigen von P_c identisch ist. Diese Menge ist es, die von Cantor in gewisse gleichmächtige und in bestimmter Art gleichmäfsig in sich dichte Mengen höherer Mächtigkeit zerlegt wird, nach einer Methode, die ich hier im Auszuge folgen lasse[3]).

---

1) Math. Ann. 21, S. 575 und 23, S. 466.

2) Acta math. 2, S. 425. Der Satz berichtigt einen von Cantor ausgesprochenen Irrtum, dafs $R^{(\alpha)} = 0$ sei; vgl. Math. Ann. 21, S. 575 und 23, S. 468.

3) Vgl. für das Folgende eine Abhandlung Cantor's in Acta math. 7, S. 105.

Man kann für die Punktmenge in der Umgebung eines beliebigen Punktes q einen Mächtigkeitsgrad definiren, und zwar auf folgende Weise. Man denke sich um q beliebige einander einschliefsende Kugeln

$$H_1, H_2, H_3 \cdots\cdots H_\nu \cdots\cdots,$$

die gegen q convergiren, und bezeichne die in H_ν enthaltene Teilmenge von P durch P_ν; alsdann hat P_ν eine ganz bestimmte Mächtigkeit β_ν, und es ist sicher $\beta_\nu \geqq \beta_{\nu+1}$. Wir nehmen nun ausdrücklich an, dafs die Mächtigkeiten eine wohlgeordnete Menge bilden[1]). Alsdann sind die β_ν Ordnungszahlen. Da es keine Menge Ordnungszahlen vom Typus $^*\omega$ giebt, so haben die Zahlen β_ν eine bestimmte untere Grenze α, oder mit andern Worten, diese Zahlen können von einem bestimmten β_μ an nicht mehr abnehmen. Die so definirte Zahl α ist alsdann der Mächtigkeitsgrad resp. die Mächtigkeit von P in der Umgebung von q.

Wir gehen aus von der Gleichung $P = P_i + P_g$, die wir jetzt mit Cantor

$$P = Pa + Pc$$

schreiben, und zwar heifst $Pa = P_i$ Adhärenz von P, und $Pc = P_g$ die Cohärenz von P; falls P einen in sich dichten Bestandteil enthält, gehört er notwendig der Cohärenz Pc an. Die Menge Pc kann in analoger Weise gespalten werden; setzt man

$$Pc = Pca + Pc^2,$$

so ist auch hier wieder Pca eine isolirte Menge, während Pc^2 jeden in sich dichten Bestandteil von P enthält. Diese Bezeichnungsweise folgt dem associativen Gesetz und gestattet daher den Schlufs von ν auf $\nu + 1$; man erhält nach ν-maliger Spaltung

$$\begin{aligned} P &= Pa + Pca + Pc^2a + \cdots + Pc^{\nu-1}a + Pc^\nu \\ &= \sum_{\lambda = 0, 1, \cdots \nu-1} Pc^\lambda a + Pc^\nu, \end{aligned}$$

und man erkennt wie oben, dafs diese Gleichung bis zu transfiniten Ordnungszahlen fortgesetzt werden kann, indem man auch hier

$$Pc^\omega = \mathfrak{D}(P, Pc, Pc^2, \cdots)$$

und allgemein, falls $\{\alpha_\nu\}$ eine beliebige Fundamentalreihe mit β als Limeszahl ist,

$$Pc^\beta = \mathfrak{D}(Pc^{\alpha_1}, Pc^{\alpha_2}, Pc^{\alpha_3}, \cdots)$$

definirt[2]). Man erhält so die Formel

1) Der folgende Schlufs wird illusorisch, falls die Mächtigkeiten keine wohlgeordnete Menge bilden.

2) Der Satz, dafs $P^{(\beta)}$ immer existirt, falls alle $P^{(\alpha_\nu)}$ existiren, wenn β die Limeszahl von $\{\alpha_\nu\}$ ist, hat hier übrigens kein Analogon; es beruht darauf, dafs die Mengen Pc^α nicht abgeschlossen sind.

$$P = \underset{\beta = 0, 1, 2, \cdots \omega, \cdots < \alpha}{\Sigma P c^\beta a} + P c^\alpha,$$

in der sich die Summation über alle Ordnungszahlen bis zu α erstreckt, resp.

(3) $$P = \underset{\lambda = 0, 1, 2, \cdots \omega, \cdots \alpha, \cdots}{\Sigma P c^\lambda a} + P c^\Omega,$$

in der die Summe über alle Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse auszudehnen ist. Auch in diesen Formeln ist jede Adhärenz $Pc^\lambda a$ eine isolirte Menge, während die Cohärenz Pc^λ stets alle in sich dichten Bestandteile von P enthält.

6. Wir discutiren jetzt unsere Gleichung in ähnlicher Weise, wie dies oben geschehen ist. Ist zunächst P abzählbar, so kann die rechte Seite von (3) wiederum nur eine abzählbare Menge von Summanden enthalten, die nicht Null sind; es giebt daher auch hier eine erste Zahl α, so dafs $Pc^\alpha a = 0$ ist. Andererseits ist aber

$$Pc^\alpha = Pc^\alpha a + Pc^{\alpha+1},$$

und daraus folgt wieder

$$Pc^\alpha = Pc^{\alpha+1} = Pc^\Omega.$$

Hier sind nun an sich zwei Fälle möglich; entweder ist $Pc^\alpha = 0$, und man hat

$$P = \Sigma Pc^\beta a = R,$$

oder aber Pc^α ist von Null verschieden. Nun enthält, wie wir oben sahen, Pc^α jeden in sich dichten Bestandteil von P; aus der Gl. (3) folgt daher, dafs in diesem Fall Pc^α selbst eine in sich dichte Menge ist, die wir mit U bezeichnen; man hat also

$$P = \Sigma Pc^\beta a + Pc^\Omega = R + U.$$

Ist zweitens die Menge P von höherer Mächtigkeit, so läfst sich zunächst zeigen, dafs sie alsdann stets einen in sich dichten Bestandteil enthält. Wir betrachten dazu eine Menge Q, die aus allen Punkten q bestehen soll, in deren Umgebung P von höherer Mächtigkeit ist[1]). Ist nun $V = \mathfrak{D}(P, Q)$ der gemeinsame Teiler von P und Q, so mufs diese Menge, wie Cantor beweist, in sich dicht sein.

Hieraus ziehen wir nun eine Reihe von Folgerungen. Cantor nennt noch eine Menge separirt, falls sie keinen in sich dichten Bestandteil enthält; beispielsweise ist jede isolirte Menge separirt. Ferner soll eine in sich dichte Menge homogen heifsen, falls sie um jeden Punkt die gleiche Mächtigkeit hat, insbesondere homogen von der ν-ten Ordnung, falls sie von der ν-ten Mächtigkeit ist. Da wir nun eben sahen, dafs jede Menge höherer Mächtigkeit einen in sich dichten Bestandteil enthält, so folgt zunächst, dafs die sepa-

1) Vgl. die obenstehende Definition.

rirten Mengen abzählbar sind, und es folgt weiter, dafs sie demjenigen bei abzählbaren Mengen auftretenden Fall entsprechen, dafs $Pc^{\alpha} = 0$ ist. Also folgt:

Eine separirte Menge R ist abzählbar; es giebt für sie eine kleinste Zahl α, so dafs $Pc^{\alpha} = 0$ ist, und es besteht für sie die Gleichung

$$R = \underset{\beta = 0, 1, 2, \cdots \omega, \cdots < \alpha}{\Sigma Pc^{\beta} a}.$$

Für eine nicht separirte abzählbare Menge giebt es stets eine erste Zahl α, so dafs Pc^{α} eine in sich dichte Menge U erster Ordnung ist; es besteht die Gleichung

$$P = \Sigma Pc^{\beta} a + Pc^{\alpha} a = R + U.$$

Die Menge R kann Null sein; immer aber ist, wie leicht ersichtlich, $\mathfrak{D}(R, U') = 0$.

Ist die Menge P von höherer Mächtigkeit, so enthält sie, wie oben gezeigt, jedenfalls den in sich dichten Bestandteil V; er gehört Pc^{Ω} an, da dies für jeden in sich dichten Bestandteil von P der Fall ist. Die Menge $R = \Sigma Pc^{\beta} a$ ist daher auch hier eine separirte Menge; es mufs daher auch in diesem Fall ein erstes α existiren, so dafs $Pc^{\alpha} a = 0$ ist. Die in sich dichte Menge Pc^{Ω} enthält jedenfalls den Bestandteil V höherer Mächtigkeit; sie kann aber aufserdem noch einen in sich dichten Bestandteil erster Mächtigkeit U enthalten. Wir haben daher folgenden Satz:

VIII. Ist P eine Menge höherer Mächtigkeit, so besteht eine Gleichung

$$P = R + U + V,$$

wo $R = \Sigma Pc^{\beta} a$ eine separirte Menge ist, U eine homogene Menge erster Ordnung und V eine in sich dichte Menge höherer Mächtigkeit darstellt. Die Mengen R und U können auch Null sein.

Auch hier folgt leicht, dafs $\mathfrak{D}(R, U') = 0$, $\mathfrak{D}(R, V') = 0$ und $\mathfrak{D}(U, V') = 0$ ist.

Läfst man Mengen zu, deren Mächtigkeit beliebig ist, so braucht V nicht homogen zu sein; es kann aber V in homogene Mengen gespalten werden, die aufsteigende Mächtigkeit besitzen. Denjenigen Bestandteil von V, der eine in sich dichte Menge β-ter Mächtigkeit darstellt, hat Cantor als β-te Inhärenz $P_{i\beta}$ von P bezeichnet, so dafs U die erste Inhärenz ist.

Die vorstehenden allgemeinen Sätze haben eine Anwendung bisher nicht erfahren.

Drittes Capitel.

Die abgeschlossenen und perfecten Mengen.

Die theoretisch wichtigsten Punktmengen sind die abgeschlossenen und perfecten Mengen, sie sind zugleich diejenigen, die in Analysis und Geometrie am häufigsten auftreten. In der Analysis findet dies überall da statt, wo die Grenzpunkte einer Menge dieselbe Eigenschaft haben wie die Menge selbst, wie bei den Unstetigkeitsstellen einer reellen Function von gegebenem Unstetigkeitsgrad, ferner in der Theorie der ungleichmäſsigen Convergenz der Reihen, bei den singulären Stellen einer analytischen Function u. s. w. Ihre besondere Wichtigkeit für die Geometrie werden wir im vierten Abschnitt in eingehender Weise zu würdigen haben. Die mengentheoretische Erörterung der geometrischen Grundbegriffe ist gar nichts anderes als die Analyse und die Einteilung der perfecten Mengen, stellt doch das Continuum den einfachsten Typus einer perfecten Menge dar. Man begegnet diesen Mengen aber auch bei einzelnen besonderen geometrischen Problemen, so z. B. in einem scheinbar so heterogenen Gebiet, wie in der Theorie der geodätischen Linien, wie ein kürzlich von Hadamard ausgesprochener Satz beweist[1]).

Für die abgeschlossenen und perfecten Mengen kann man die Frage nach ihrer Mächtigkeit vollständig beantworten. Nach einem von Cantor schon früh ausgesprochenen Satz ist eine abgeschlossene Menge entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Continuums; insbesondere sind alle perfecten Mengen von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ (1). Aber auch ihre innere Structur ist uns ziemlich durchsichtig geworden. Diese Structur kommt naturgemäſs nur in solchen Gebietsteilen H in Frage, in denen die Menge nirgends dicht ist; denn eine abgeschlossene Menge, die in einem Gebiet H überall dicht ist, enthält gemäſs S. 63 alle Punkte von H. Die Structur der nirgends dichten abgeschlossenen Mengen drückt sich darin aus, daſs die von den Punkten der Menge freien Gebietsteile eine überall dichte Gebietsmenge D bilden; die eine ist durch die andere bedingt (3). Für die linearen perfecten Mengen ist dieser Zusammenhang zuerst von du Bois-Reymond[2]) und Harnack ans Licht gezogen worden[3]). Für ebene und räumliche Mengen habe ich selbst eine Darstellung ihrer Structur abgeleitet und geglaubt, sie diesem Bericht einfügen zu sollen (6). Für eine Reihe von Untersuchungen aus dem Gebiet der reellen Functionen mehrerer Variablen dürfte sie sich

1) Journ. de math. (5) 4, S. 67 ff.

2) Du Bois hat wohl zuerst darauf hingewiesen, daſs sich auſser Punkten auch Intervalle überall dicht verteilen lassen. Vgl. Math. Ann. 16, S. 128, Anm.

3) Vgl. übrigens auch die Beispiele in Cap. V dieses Abschnitts.

als eine ebenso natürliche wie zweckmäfsige Grundlage erweisen. Besondere Sätze über ebene und räumliche abgeschlossene Mengen liegen sonst nur wenige vor. Aufser denen, die von Cantor selbst stammen, sind kürzlich von Vivanti und Baire Beiträge zu ihrer Theorie geliefert worden (8).

Den nirgends dichten abgeschlossenen Mengen, insbesondere den perfecten kommt noch eine weitere Wichtigkeit formaler Art zu (5). Da das Continuum nur ein specieller Fall einer perfecten Menge ist, so läfst sich erwarten, dafs die Übertragung der oben (S. 32) genannten, scheinbar am Continuum haftenden Begriffe sich auf perfecte Mengen besonders natürlich gestaltet. Dies ist in der That der Fall und hat für einzelne Gebiete der Analysis wichtige Bedeutung, wie sich ausführlich im dritten Abschnitt zeigen wird. Die hierauf bezüglichen allgemeinen Untersuchungen sind erst ganz kürzlich von R. Baire aufgeworfen und durchgeführt worden.

1. Da eine abgeschlossene Menge ihre Grenzpunkte enthält, so ist jeder Punkt von P' auch Punkt von P; aus der Abzählbarkeit von P folgt jetzt also auch diejenige von P'. Umgekehrt folgt allgemein aus der Abzählbarkeit von P' diejenige von P; man kann also hier von P' auf P und von P auf P' schliefsen. Demnach nehmen die Sätze des vorigen Capitels hier die folgende einfache Fassung an:

I. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Abzählbarkeit einer abgeschlossenen Menge P besteht darin, dafs es eine Zahl α giebt, für die $P^{(\alpha)} = 0$ ist.

II. Für jede nicht abzählbare abgeschlossene Menge existirt eine Zahl α, so dafs $P^{(\alpha)}$ eine perfecte Menge ist.

Eine abgeschlossene Menge ist daher entweder abzählbar, oder von der gleichen Mächtigkeit wie eine perfecte Menge. Im ersten Fall kann die abgeschlossene Menge durch successive Abtrennung isolirter Teilmengen erschöpft werden; im zweiten Fall führt diese allmähliche Abtrennung zuletzt auf eine nicht mehr auflösbare perfecte Menge. Von den perfecten Mengen weifs man nun weiter, und wir werden es sofort ausführlich begründen, dafs sie sämtlich die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen; es ergiebt sich also:

III. Jede abgeschlossene Menge ist entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit des Continuums, insbesondere hat jede perfecte Menge die Mächtigkeit des Continuums.

2. Sei nun zunächst $Q = \{q\}$ eine nirgends dichte abgeschlossene Menge, die auf einer Geraden enthalten ist, so hat sie links und rechts je einen Grenzpunkt, der ihr, da sie abgeschlossen ist, angehört. Beide Punkte bestimmen die zu Q gehörige Strecke τ. Sei nun $M = \{m\}$ die Complementärmenge zu Q, so giebt es um einen Punkt m ein ihn einschliefsendes Intervall $y_0 \cdots z_0$, dessen innere Punkte ebenfalls noch zu M gehören; denn sonst wäre m

Grenzpunkt von Q, und damit auch Punkt von Q, und wenn $y \cdots z$ die obere Grenze aller derartigen Intervalle ist, so folgt aus der Natur des Grenzpunktes wieder, dafs y und z auch Punkte von Q sind. Die Strecke $y \cdots z$ heifse das zu m gehörige punktfreie Intervall δ. Da Q nirgends dicht sein soll, so giebt es in jedem Teilintervall τ' von τ Punkte von M; es giebt daher auch immer Intervalle δ, die ganz oder teilweise in τ' fallen. Wir nennen deshalb die Intervalle δ eine überall dichte Intervallmenge und bezeichnen sie durch $D = \{\delta_\nu\}$. Da zu allen inneren Punkten m' eines Intervalles δ_ν ebenfalls δ_ν als punktfreies Intervall gehört, so ist die Menge D durch die Menge Q überdies eindeutig bestimmt.

Es ist nun aber auch die Umkehrung richtig; von einer beliebigen überall dichten Intervallmenge $D = \{\delta_\nu\}$ wird sich ergeben, dafs sie die Menge Q eindeutig bestimmt, und zwar so, dafs Q aus den Endpunkten der Intervalle und deren Grenzpunkten gebildet wird; d. h. es besteht der folgende Satz:

IV. Jede lineare, nirgends dichte, abgeschlossene Menge Q besteht aus den Endpunkten einer überall dichten Intervallmenge D und deren Grenzpunkten[1]), und umgekehrt.

Die Lage der punktfreien Intervalle kann nun entweder eine solche sein, dafs zwei von ihnen aneinandergrenzen oder dafs sie getrennt sind. Der Endpunkt zweier angrenzender Intervalle ist notwendig ein isolirter Punkt von Q. Da nun eine perfecte Menge keine isolirten Punkte enthält, so folgt weiter:

V. Jede lineare, nirgends dichte, perfecte Menge besteht aus den Endpunkten getrennter Intervalle und deren Grenzpunkten, und umgekehrt.

3. Für den vollständigen Beweis dieser Sätze ist nur noch zu zeigen, in welcher Weise eine überall dichte Menge $D = \{\delta\}$ die bezügliche abgeschlossene Menge bestimmt. Wir beginnen mit dem Beweis des zweiten Satzes, so dafs die Menge D aus lauter getrennten Intervallen besteht. Wiederum sei τ die Strecke, in der die Menge D enthalten ist, und wir setzen jetzt

$$C = T + M,$$

wo C alle Punkte von τ, $M = \{m\}$ die inneren Punkte der Intervalle δ_ν darstellt, und $T = \{t\}$ aus den übrigen Punkten von τ besteht, so dafs T nnd M Complementärmengen sind.

Sei nun δ das gröfste der Intervalle von D. Es bestimmt auf τ links und rechts von sich je ein Restintervall τ_0 resp. τ_1, so dafs

$$\tau = \tau_0 + \delta + \tau_1$$

1) Mit diesem Satz ist auch die Structur einer beliebigen nirgends dichten linearen Menge bestimmt; denn eine solche entsteht aus Q, falls man Grenzpunkte, die zu Q gehören, beliebig tilgt.



ist. Das gröſste innerhalb τ_0 gelegene Intervall von D sei δ_0, dasjenige von τ_1 sei δ_1; durch sie entstehen auf τ_0 die beiden Restintervalle τ_{00} und τ_{01}, auf τ_1 ebenso τ_{10} resp. τ_{11}. Das gröſste Intervall auf jeder Strecke τ_{ik} sei wieder δ_{ik} u. s. w.; so fortfahrend gelangen wir zu der folgenden Anordnung der Menge D:

$$\delta,\ \delta_0,\ \delta_1,\ \delta_{00},\ \delta_{01},\ \delta_{10},\ \delta_{11},\ \cdots,$$

in der notwendig jedes Intervall vorkommt. Wir setzen noch

$$D = \{\delta_{ikl\ldots}\} = \{\delta_N\},$$

wo N irgend eine Gruppe von ν Indices bedeuten mag, und setzen weiter

$$(1) \qquad \tau_N = \tau_{N,0} + \delta_N + \tau_{N,1}.$$

Nun sei t irgend ein Punkt von T. Da er seiner Definition nach nicht innerer Punkt von δ ist, so ist er notwendig innerer Punkt oder Endpunkt von τ_0 oder τ_1, d. h. von einem Intervall τ_i. Da er wiederum nicht innerer Punkt eines Intervalles δ_i ist, so ist er innerer Punkt oder Endpunkt eines Intervalles τ_{ik} u. s. w.; es giebt also eine wohldefinirte Intervallreihe

$$\tau_i,\ \tau_{ik},\ \tau_{ikl},\ \cdots\ \tau_N,\ \cdots$$

mit bestimmten Indices i, k, l, $\cdots$, die τ als inneren Punkt oder Endpunkt enthalten, und deren jedes ein Teil des vorhergehenden ist und mit ihm je einen Endpunkt gemein hat. Diese Reihe convergirt nun notwendig gegen t; denn da jedes Intervall δ_N als gröſstes bezügliches Intervall gewählt wurde, so convergirt, wie leicht ersichtlich, τ_N gegen Null. Der Punkt t kann nun aber auch als Grenzpunkt jeder Punktfolge betrachtet werden, in die je ein beliebiger Punkt der Intervalle τ_i, $\tau_{ik}, \cdots \tau_N \cdots$ eingeht, insbesondere also auch als Grenzpunkt einer Punktfolge, die aus den Endpunkten der entsprechenden Intervallreihe

$$\delta_i,\ \delta_{ik},\ \delta_{ikl},\ \cdots\ \delta_N,\ \cdots$$

besteht. Daraus folgt, daſs jeder Punkt von T Grenzpunkt von Intervall-Endpunkten ist und umgekehrt, so daſs in der That T eine perfecte Menge bildet. Der durch die obige Intervallreihe bestimmte Punkt t ist überdies selbst Endpunkt eines Intervalles δ_N oder nicht, je nachdem die Indices i, k, l, $\cdots$ von einem bestimmten an sämtlich den Wert 0, resp. sämtlich den Wert 1 haben oder nicht. Im ersten Fall bleibt nämlich von einem bestimmten τ_N an für alle dann folgenden Intervalle der Reihe der eine Endpunkt fest, und dies ist der Punkt t, der damit zugleich Endpunkt eines Intervalles δ_N ist. Wir setzen noch

$$T = T_e + T_g = T_l + T_r + T_g,$$

wo T_e die Endpunkte der Intervalle, insbesondere T_l die linken und T_r die rechten Endpunkte darstellt.

Die allgemeinste Structur einer nirgends dichten abgeschlossenen linearen Menge ergiebt sich nun folgendermaſsen. Es ist

$$Q = \Sigma Q_i^{(\alpha)} + Q^{\Omega} = R + T, \tag{2}$$

wo R abzählbar und T eine nirgends dichte, perfecte Menge ist. Ist zunächst $T = 0$, so folgt aus dem Vorigen, daſs alle punktfreien Intervalle δ aneinandergrenzen müssen. Ist dagegen T nicht Null, so sei wieder $D = \{\delta_N\}$ die zu T gehörige Intervallmenge, alsdann können die Punkte von R nur innere Punkte dieser Intervalle sein. Ist also R_N die im Intervall δ_N liegende Teilmenge von R, so ist R_N, falls man noch die Endpunkte von δ_N hinzurechnet, eine nirgends dichte abzählbare abgeschlossene Menge. Eine solche befindet sich in jedem Intervall δ_N; sie kann freilich auch Null sein. Es folgt also

$$Q = \Sigma R_N + T. \tag{3}$$

Für die Structur der allgemeinsten abgeschlossenen linearen Menge ergiebt sich schlieſslich, daſs die Intervalle, in denen sie überall dicht, und diejenigen, in denen sie nirgends dicht ist, je eine höchstens abzählbare Menge bilden. Endlich können wir noch folgenden Satz aussprechen:

VI. Eine überall dichte Intervallmenge $D = \{\delta\}$ bestimmt durch ihre Endpunkte und deren Grenzpunkte eine perfecte oder eine abzählbare Menge, je nachdem jedes oder kein Intervall von allen andern getrennt ist[1].

Die hiermit geschilderte Beziehung zwischen den überall dichten Intervallmengen und den Punktmengen dürfte in ihrer Bedeutung zuerst von du Bois[2] und Harnack[3] erkannt worden sein[4]. Ihr Interesse galt allerdings weniger den Punktmengen selbst, als vielmehr ihrem Inhalt.

4. Um zu zeigen, daſs die perfecten linearen Mengen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen, genügt es augenscheinlich, dies für eine nirgends dichte Menge T nachzuweisen. Zum Beweise benutzt man am besten eine Methode, die sich auch für spätere Anwendungen nützlich erweisen wird, und die darin besteht, die zu T gehörige abzählbare Intervallmenge $D = \{\delta_N\}$ auf eine abzählbare überall dichte Punktmenge $X = \{x_N\}$ so abzubilden, daſs zwei Punkte dieselbe Lage zu einander haben, wie die entsprechenden Intervalle.

1) Treten beide Eigenschaften combinirt auf, so ergiebt sich eine abgeschlossene Menge des allgemeinsten Typus.

2) Die allgemeine Functionentheorie, S. 188 (1882).

3) Math. Ann. 19, S. 239 (1892).

4) Vgl. übrigens auch Bendixson, Acta math. 2, S. 416 und Öfv. af Svensk. Vet. Forh. Stockholm, Bd. 39, Nr. 2, S. 31 (1883).

Diese Abbildung hat bereits Cantor zum Zweck des vorliegenden Beweises benutzt[1]).

Sei t ein beliebiges Intervall, und x ein Punkt innerhalb desselben. Durch x zerfällt t in t_0 und t_1, so dafs t_0 links von t_1 liegt. Innerhalb t_0 werde x_0 beliebig gewählt, ebenso x_1 innerhalb t_1; durch x_0 zerfalle t_0 in t_{00} und t_{01}, ebenso t_1 durch x_1 in t_{10} und t_{11}. Innerhalb jedes Intervalles t_{ik} wird wieder x_{ik} beliebig angenommen u. s. w.; so ergiebt sich eine Punktmenge

(4) $$x,\ x_i,\ x_{ik},\ x_{ikl}, \cdots x_N, \cdots$$

sowie eine Reihe von Intervallen

(5) $$t,\ t_i,\ t_{ik},\ t_{ikl}, \cdots t_N, \cdots,$$

und zwar ist auch hier jedes t_N Teilintervall des vorhergehenden. Werden nun insbesondere die Punkte x_N so gewählt, dafs

$$X = \{x_{ikl} \cdots\} = \{x_N\}$$

eine überall dichte Punktmenge abgiebt, so liefert wieder jede Reihe (5) bei bestimmten Indices $i, k, l, \cdots$ einen Punkt des auf t enthaltenen Continuums C, und umgekehrt kann auch jeder Punkt von C durch eine solche Reihe dargestellt werden. Setzt man noch

$$C = X' = X + X_g,$$

so bestimmt die Reihe (4) wieder einen Punkt von X, falls alle Indices von einem bestimmten an sämtlich 0 oder sämtlich 1 sind, sonst aber einen Punkt von X_g. Werden nun jedem x_N die Endpunkte desjenigen δ_N zugeordnet, dessen Indices mit denen von x_N übereinstimmen, so entspricht damit auch jedem Intervall τ_N das bezügliche Intervall t_N, und damit jedem Punkt von X_g eindeutig ein Punkt von T_g und umgekehrt, während den Punkten von X, in Übereinstimmung mit der getroffenen Festsetzung, je zwei Punkte von T, nämlich je ein Punkt von T_l und je einer von T_r, entsprechen. Damit ist aber der Satz für die Menge T bewiesen, d. h. es ist $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}$.

Auf Grund der Formel (3) folgt nun weiter, dafs jede lineare abgeschlossene Menge die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{c}$ hat.

5. Die Übertragbarkeit derjenigen Eigenschaften der Punktmengen, die ursprünglich eine Beziehung zum stetigen Raum betreffen, auf abgeschlossene und perfecte Mengen, hat durch die neuesten Arbeiten von R. Baire eine mehr als formale Bedeutung erlangt. Ist $U = \{u\}$ Teilmenge einer linearen nirgends dichten abgeschlossenen Menge Q, so wird ein Punkt u isolirt bezüglich Q heifsen, wenn U keine Punktfolge enthält, als deren Grenzpunkt er darstellbar ist; jeder andere Punkt u heifst Grenzpunkt bezüg-

1) Math. Ann. 23, S. 481.

lich Q, er ist natürlich auch Grenzpunkt in bezug auf das Continuum C, von dem Q selbst eine Teilmenge darstellt. Wir können also wieder

$$U = U_i + U_g$$

setzen, wo U_i die isolirten Punkte und U_g die Grenzpunkte bedeutet. Wie im allgemeinen Fall heifst dann U eine bezüglich Q isolirte Menge, falls $U_g = 0$ ist, sie heifst in sich dicht bezüglich Q, falls $U_i = 0$ ist. Sie heifst wieder abgeschlossen bezüglich Q[1]), falls sie jeden ihrer Grenzpunkte enthält, und heifst perfect bezüglich Q, falls sie abgeschlossen und in sich dicht ist. Sie heifst endlich überall dicht bezüglich Q, falls $U' = Q$ ist, sie heifst nirgends dicht bezüglich Q, falls sie keine Teilmenge enthält, die überall dicht bezüglich Q ist. Eine in sich dichte Menge U ist daher immer überall dicht bezüglich einer perfecten Menge T, so dafs damit der Begriff in sich dicht entbehrlich wird.

Die Beziehung der nirgends dichten Mengen zur Intervallmenge D bewirkt, dafs für sie manche Probleme einen besonders einfachen Ausdruck finden. Um nur ein Beispiel zu erwähnen, so sei Q irgend eine nirgends dichte abgeschlossene Menge, die zur Intervallmenge D gehört, und Q_1 eine ebenfalls abgeschlossene Teilmenge von Q, dann gehört zu Q_1 eine Intervallmenge D_1, die aus D so entsteht, dafs entweder das Gesamtintervall τ von Q sich verringert, oder aber gewisse Intervalle δ zu einem Intervall δ_1 zusammentreten. Der Übergang von D zu D_1 kann daher so beschrieben werden, dafs gewisse Intervalle von D aufser Betracht kommen. Diese Intervalle, resp. die von ihnen gebildete Menge sei Δ. Wird nun auch von Q_1 eine abgeschlossene Teilmenge Q_2 gebildet, und so weiter fortgefahren, so kann dieser Procefs bis zu transfiniten Ordnungszahlen fortgesetzt werden; aber er mufs nach einer abzählbaren Menge von Schritten abbrechen. Denn die Mengen

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_\omega, \cdots \Delta_\alpha, \cdots$$

können nur in abzählbarer Menge existiren, da jede von ihnen eine Teilmenge von D ist, und D selbst abzählbar ist. Es besteht also der Satz:

VII. Werden aus einer abgeschlossenen Menge Q der Reihe nach abgeschlossene Mengen $Q_1, Q_2, \cdots$ so gebildet, dafs jede eine Teilmenge der vorhergehenden ist, und gelangt man dadurch schliefslich zu einer abgeschlossenen Menge T, so mufs diefser Procefs bereits nach einer abzählbaren Reihe von Schritten zur Menge T führen, welches auch diese Menge T sein mag.

---

1) Eine bezüglich Q abgeschlossene Menge ist übrigens auch in bezug auf C abgeschlossen.

Die so bestimmte Menge T kann sowohl Null, wie auch eine perfecte Menge sein. Der einfachste Fall, auf den wir das obige Resultat anwenden können, sind die Formeln des vorigen Capitels, insbesondere der Satz, dafs die Abspaltung isolirter Punkte nach einer abzählbaren Menge von Schritten die Menge Q ganz oder auf eine perfecte Menge reducirt. In der That bedeutet jede Tilgung eines isolirten Punktes eine Verminderung der Menge D, und die Ableitungen von Q stellen eine Folge von Mengen dar, wie sie dem Satz VII entspricht. Hierin liegt also ein Beweis des Hauptsatzes auf S. 69, der auf die Mächtigkeit resp. die Gesamtheit der Zahlen der zweiten Zahlklasse nicht mehr Bezug nimmt[1]).

6. Wir wenden uns endlich zu den nirgends dichten abgeschlossenen Mengen der Ebene und des Raumes. Wie aus den Resultaten der folgenden Seiten hervorgeht, sind ihre Eigenschaften denen der linearen Mengen durchaus analog.

Sei T eine in dem ebenen Bereich H enthaltene nirgends dichte abgeschlossene Menge, und $M = \{m\}$ ihre Complementärmenge bezüglich H. Um der Untersuchung ihrer gegenseitigen Beziehungen eine zwingende Form zu geben, construiren wir zunächst um einen Punkt m von M einen von den Punkten von T freien Bereich[2]).

Dazu nehme man in der Ebene eine x- und y-Axe beliebig an, der Einfachheit halber rechtwinklig, und es sei τ dasjenige, notwendig existirende, den Axen parallel gerichtete Rechteck, dessen Seiten mindestens je einen Punkt von T enthalten, während aufserhalb davon kein Punkt von T liegt. Dieses Rechteck heifse **der zu T gehörige Bereich τ**.

Sei nun m ein innerer Punkt von τ, und q ein um ihn als Mittelpunkt liegendes, den Axen parallel gerichtetes Quadrat, dessen sämtliche inneren Punkte wieder Punkte von M sind, so giebt es für diese Quadrate eine Grenzlage q_ω, so dafs auf dem Umfang von q_ω mindestens ein Punkt von T liegt; falls nicht etwa das bezügliche Wachstum von q bereits dadurch einen Stillstand erfährt, dafs eine oder mehrere seiner Seiten mit Seiten von τ zusammenfallen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dafs nur eine Seite s_1 von q_ω mit einer Seite von τ zusammenfällt oder Punkte von T enthält; zugleich setzen wir fest, dafs ein solcher Punkt nicht ein Eckpunkt des Quadrats sei. Wir lassen jetzt das Quadrat q_ω so wachsen, dafs die Seite s_1 **fest** bleibt. Die drei übrigen Seiten sind nach Annahme von Punkten von T frei, und zwar einschliefslich der Eckpunkte. Es giebt dann wieder eine Grenzlage r_ω, die ein Rechteck ist, so dafs eine der drei beweglichen Seiten entweder

1) Vgl. S. 65 dieses Berichts.

2) Vgl. auch eine Note des Verfassers in den Nachr. d. Gött. Ges. d. Wiss. 1899, S. 282.

einen Punkt von T enthält oder mit einer Seite von τ zusammenfällt, während das Innere keine Punkte von T enthält. Ist s_2 die bezügliche Seite, so lassen wir das Rechteck r_ω weiterwachsen, so dafs s_1 und s_2 fest bleiben, während die beiden andern Seiten immer wieder einem Quadrat um m angehören. Es wird dann noch eine dritte und zuletzt auch die vierte Seite fest, und wir erhalten so zu m einen von der Richtung der x- und y-Axe abhängigen, sonst aber eindeutig bestimmten rechteckigen Bereich, dessen Inneres von Punkten von T frei ist, während sein Umfang notwendig mindestens einen Punkt von T enthält. Wir nennen ihn den zu m gehörigen punktfreien Bereich δ in bezug auf τ. Man sieht übrigens, dafs, wenn zugleich zwei oder mehr Seiten des veränderlichen Quadrats fest werden, dadurch nur das vorstehende Verfahren abgekürzt wird; ebenso, wenn ein Punkt t in einen Eckpunkt des Quadrats fällt, indem dadurch beide durch ihn gehenden Seiten fest werden.

7. Die Construction des punktfreien Bereiches δ für jeden Punkt m erscheint mir als das wesentlichste Hilfsmittel, um die Sätze über lineare Mengen auf ebene Mengen zu übertragen. Ehe ich dies thue, will ich auf die Unterschiede hinweisen, die für diesen Bereich bei linearen und ebenen Mengen bestehen. Der Bereich δ ist für lineare Mengen eindeutig bestimmt, bei ebenen Mengen hängt er von der Wahl der festen Richtungen ab. Ferner gehören bei linearen Mengen beide Endpunkte des Intervalls δ der Menge Q an; bei ebenen Mengen braucht δ nur einen Punkt von T auf dem Umfang zu enthalten, es können aber auch unendlich viele, ja sogar alle Punkte des Umfangs der Menge T angehören. Ferner gehört zu allen Punkten des linearen Intervalls δ dasselbe Intervall, nämlich δ selbst; bei den ebenen Mengen können jedoch zu zwei Punkten m' und m'' von δ Bereiche δ' und δ'' gehören, die unter sich und von δ verschieden sind[1]). In diesem Umstand besteht eine wesentliche Schwierigkeit. Im allgemeinen kann man freilich nachweisen, dafs wenigstens zu allen Punkten einer gewissen Umgebung von m ebenfalls noch δ als Bereich gehört, oder dafs diese Umgebung in eine endliche Zahl von Gebieten zerfällt, deren jedem der nämliche Bereich zugehört; es giebt jedoch einen Fall, in dem sich dieser Nachweis nicht ermöglichen läfst, und in ihm verliert daher der für lineare Mengen mögliche Schlufs, dafs es einen gröfsten Bereich giebt, seine Beweiskraft.

Aus diesem Grunde müssen wir hier einen andern Weg einschlagen, der übrigens auch für lineare Mengen gangbar ist. Sei wieder m ein Punkt von M, so kann sein Bereich δ ganz innerhalb τ liegen, er kann aber auch mit τ eine oder mehrere Seiten

1) Diese Bereiche greifen teilweise übereinander.

gemein haben, ja selbst mit τ identisch sein. Ist δ nicht mit τ identisch, so verlängere man, wenn nötig, die Seiten von δ bis zum Schnitt mit τ, dadurch wird τ in rechteckige Teile zerlegt, von denen einer δ ist; die übrigen, deren Zahl höchstens acht beträgt, seien

$$\tau_1, \tau_2, \cdots \tau_\nu,$$

wo also $1 \leqq \nu \leqq 8$ ist. Im Rechteck τ_i nehme man den Punkt m_i von M beliebig an und construire seinen punktfreien Bereich δ_i in bezug auf τ_i; falls er nicht mit τ_i identisch ist, so zerlegt er τ_i in δ_i und die Restbereiche

$$\tau_{i1}, \tau_{i2}, \cdots \tau_{i\nu'},$$

wo wiederum $1 \leqq \nu' \leqq 8$ ist. In dieser Weise kann man weiter gehen und erhält so wiederum eine Reihe von Rechtecken

$$\tau, \tau_i, \tau_{ik}, \tau_{ikl}, \cdots \tau_N, \cdots$$

und in ihnen die punktfreien Bereiche

$$\delta, \delta_i, \delta_{ik}, \delta_{ikl}, \cdots \delta_N, \cdots,$$

so dafs jeder Bereich δ_N entweder innerhalb τ_N liegt oder damit identisch ist. Die so bestimmte Menge punktfreier Bereiche bezeichnen wir durch

$$D = \{\delta_{ikl} \cdots\} = \{\delta_N\}.$$

Sei nun t irgend ein Punkt von T, der nicht auf dem Umfang eines Bereiches δ_N liegt, so schliefst man, wie bei den linearen Mengen, dafs eine Reihe von Rechtecken

$$\tau_i, \tau_{ik}, \tau_{ikl}, \cdots \tau_N, \cdots$$

mit bestimmten Indices $i, k, l, \cdots$ existirt, so dafs jedes ein Teil des vorhergehenden ist, und t in allen enthalten ist. Da t nicht auf dem Umfang eines δ_N liegen soll, so kann die Reihe nicht abbrechen; denn sonst würde das letzte Rechteck $\tau_{ikl} \cdots$ zugleich einen Bereich $\delta_{ikl} \cdots$ darstellen, auf dessen Umfang t liegen müfste. Bricht die Reihe nicht ab, so convergirt sie entweder gegen einen Punkt, oder gegen eine Strecke, oder gegen eine Grenzlage, die selbst ein Rechteck ist. Convergirt sie gegen einen Punkt, so folgt wie bei den linearen Mengen, dafs dieser Punkt auch als Grenzpunkt solcher Punkte von T darstellbar ist, die auf den Bereichen

$$\delta_i, \delta_{ik}, \delta_{ikl}, \cdots \delta_N, \cdots$$

liegen, wo die Indices dieser Reihe mit denen der obigen übereinstimmen. Convergirt die Reihe gegen eine Strecke h, so mufs auch auf ihr mindestens ein Punkt existiren, der in dieser Weise als Grenzpunkt darstellbar ist; es kann übrigens die Strecke h noch andere Punkte von T enthalten, doch ist dies nur so möglich, dafs sie zusammen eine abgeschlossene Menge bilden.

Convergirt dagegen die Reihe gegen ein Rechteck τ_ω, so hat es mindestens eine Seite, die nicht mit einer Seite eines Rechteckes τ_N zusammenfällt, und man schliefst zunächst wieder, dafs der Umfang von τ_ω mindestens einen Punkt von T enthält, der sich durch eine Folge wie die obige darstellen läfst. Mit τ_ω kann man verfahren wie eben mit τ; zu einem inneren Punkt m_ω von τ_ω construirt man zunächst den punktfreien Bereich δ_ω und erhält, so fortfahrend, eine Bereichmenge

$$D_1 = \{\delta_{\omega+ikl\cdots}\} = \{\delta_{\omega+N}\},$$

die zu τ_ω die nämliche Beziehung hat, wie D zu τ. So kann man weitergehen; man kann zu Mengen

$$D,\ D_1,\ D_2,\ \cdots\ D_\omega,\ \cdots\ D_\alpha,\ \cdots$$

mit transfinitem Index gelangen, aber diese Reihe kann nur eine endliche oder abzählbare Menge von Gliedern enthalten. Irgend zwei dieser Mengen haben nämlich die Eigenschaft, dafs die in sie eingehenden Rechtecke sämtlich aufserhalb von einander liegen, woraus gemäfs S. 13 die Behauptung folgt. Man wird daher den Punkt t nach einer abzählbaren Reihe von Schritten, resp. mittelst einer abzählbaren Menge von Rechtecken δ erreichen.

Die so bestimmte Menge bezeichnen wir nun wieder durch

$$D = \{\delta_\nu\},$$

indem wir uns die Bereiche δ_ν der Gröfse nach geordnet denken. Solcher Mengen kann es hier für dieselbe Menge T sehr wohl verschiedene geben, und zwar sogar unzählig viele. Für jede von ihnen besteht aber die Eigenschaft, dafs wir für den Punkt t eine unendliche Reihe von Rechtecken

$$\tau'_i,\ \tau'_{ik},\ \tau'_{ikl},\ \cdots$$

mit bestimmten Indices $i, k, l, \cdots$, die t als inneren Punkt oder als Punkt des Umfanges enthalten, so bestimmen können, dafs diese Reihe notwendig gegen t selbst convergirt, oder doch gegen eine Strecke, der t angehört[1]). Wir erhalten somit schliefslich folgendes Resultat:

VIII. Zu jeder nirgends dichten abgeschlossenen ebenen Menge T läfst sich durch eine abzählbare Reihe von Schritten eine wohl definirte abzählbare überall dichte Menge $D = \{\delta_\nu\}$ von Bereichen construiren, so dafs jeder Punkt von T auf dem Umfang eines Bereiches liegt, oder ein Grenzpunkt solcher Punkte ist, oder aber einer Strecke

1) Dies kann z. B. so geschehen, dafs man von den eben zur Erreichung von t benutzten nur solche beibehält, dafs jeder nicht gröfser als sein vorhergehender ist, die also in $\{\delta_\nu\}$ consecutiv sind.

angehört, die als gemeinsame Grenzlage derartiger Bereiche betrachtet werden kann[1]).

Man wird nun wieder fragen müssen, wann die Menge abzählbar ist, und wann nicht. In dieser Hinsicht ergiebt sich zunächst:

IX. Ist die abgeschlossene Menge T eine abzählbare Menge Q, so mufs jeder Bereich δ längs seines ganzen Umfangs an benachbarte Bereiche $\delta', \delta'', \cdots$ angrenzen oder einen Teil des Umfangs des Bereichs τ bilden, in dem Q enthalten ist.

Die Bedingung dieses Satzes ist notwendig, jedoch nicht hinreichend. Ist nämlich unsere Menge T eine perfecte Menge, so wird dadurch der Lage der Bereiche δ nur die folgende Beschränkung auferlegt, die diesmal nicht so einfach ist, wie bei den linearen Mengen. Haben zwei Bereiche δ' und δ'' eine Strecke h ihres Umfangs gemein, so mufs das Innere dieser Strecke entweder punktfrei sein, oder die auf ihr enthaltene lineare Punktmenge mufs selbst perfect sein. Ein isolirter Punkt einer solchen Menge würde nämlich, da δ' und δ'' punktfrei sind, auch für die Menge T ein isolirter Punkt sein. Es folgt also:

X. Die Gebietsmenge $D = \{\delta\}$ bestimmt stets und nur dann eine perfecte Menge, falls die Bereiche δ aufser einander liegen, oder aber jede zweien von ihnen gemeinsame Strecke punktfrei ist oder selbst eine lineare perfecte Menge enthält.

Die Structur der allgemeinsten nicht perfecten abgeschlossenen Mengen kann, wie bei den linearen Mengen, jetzt wieder so definirt werden, dafs man in jeden Bereich δ_N einer perfecten Menge oder auf seinen Umfang eine abzählbare Menge R_N setzt, die selbst abgeschlossen ist oder es unter Hinzufügung von Punkten der perfecten Menge wird, so dafs auch hier die Formel (S. 78)

$$Q = \Sigma R_N + T$$

besteht. Da jedoch die Gebietsmenge D nicht eindeutig bestimmt ist, so entsteht die Frage, ob diese Darstellung eindeutig ist. Dies ist nun in der That der Fall und folgt aus dem nachstehenden, von Vivanti zu diesem Behuf aufgestellten Satz:

XI. Zerfällt eine perfecte Menge S in zwei Mengen S_1 und S_2, von denen die eine abgeschlossen ist, so hat die andere die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Ist nämlich S_1 die abgeschlossene Menge, so giebt es Gebiete H, in denen S_1 nirgends dicht bezüglich S ist, da ja sonst $S_1 = S_1' = S$ wäre. Es giebt daher auch Gebiete H_1, in denen kein Punkt von S_1 liegt, deren sämtliche zu S gehörigen Punkte also Punkte von S_2

1) Es ist wahrscheinlich, dafs sich dies letztere durch geeignete Wahl der Richtungen der Bereichseiten vermeiden läfst.

sind. Damit ist der Satz bewiesen. Aus ihm folgt nun auch die Eindeutigkeit. Sei nämlich

$$Q = R + T = R_1 + T_1,$$

so hat man

$$T_1 = \mathfrak{D}(R, T_1) + \mathfrak{D}(T, T_1) = R_2 + T_2.$$

Nun mufs, wie ersichtlich ist, T_2 abgeschlossen sein, also müfste $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{c}$ sein, was unmöglich ist. Daher ist $R_2 = 0$, und daraus folgt $T_2 = T = T_1$.

8. Auf Grund der vorstehenden Analyse kann man die über ebene und räumliche Mengen von Cantor, resp. Baire angegebenen Sätze unmittelbar erschliefsen. Ist zunächst T eine ebene perfecte Menge, so läfst sich in ihr immer eine Teilmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ angeben. Falls nämlich in T eine lineare perfecte Teilmenge vorhanden ist, so ist sie bereits eine solche; wenn dies aber nicht der Fall ist, so kann der zu einem Punkt m gehörige Bereich δ mit τ höchstens zwei Seiten gemein haben, und daraus folgt, dafs τ in mindestens zwei Teilbereiche τ_i zerfällt, und zwar so, dafs jedes τ_i Punkte von T im Innern enthält. Jede unendliche Folge

$$\tau_i, \ \tau_{ik}, \ \tau_{ikl}, \ \cdots,$$

bei der die Indices 0 oder 1 sind, convergirt daher notwendig mindestens gegen einen Punkt von T, und diese Punkte liefern die Teilmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Damit ist gezeigt, dafs die ebenen perfecten Mengen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen.

Da die vorstehenden Entwicklungen auf Mengen eines jeden C_ν übertragbar sind, so können wir den folgenden Satz als bewiesen betrachten:

XII. Jede perfecte Menge des C_ν hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$[1]).

Bei der Wichtigkeit des Satzes möge hier noch ein zweiter Beweis eine Stelle finden, der sich des Schlusses von ν auf $\nu + 1$ bedient. Für eine ebene Menge T_2 geschieht dies so, dafs man sie auf eine Gerade projicirt. Von der so entstehenden linearen Menge T_1 zeigt man leicht, dafs sie abgeschlossen ist und nur dann einen isolirten Punkt enthalten kann, wenn auf der durch ihn laufenden Projectionsgeraden eine lineare perfecte Teilmenge von T_2 liegt. Daraus ist der Satz für T_2 unmittelbar zu schliefsen.

Aus unserer allgemeinen Analyse folgt auch leicht ein Satz Cantor's, der die Umkehrung davon ist, dafs jede Ableitung eine abgeschlossene Menge ist. Er lautet:

---

1) Ein Beweis dieses Satzes wurde zuerst von J. Bendixson gegeben; Bih. Svensk. Vet. Handl. 9, Nro 6. (1884). Cantor hatte vorher den Satz nur behauptet, Math. Ann. 23, S. 488.

Dafs dieser für nirgends dichte Mengen bewiesene Satz auch für solche Mengen gilt, die einen überall dichten Bestandteil haben, ist evident.

XIII. **Jede abgeschlossene Menge Q läfst sich als Ableitung einer anderen Menge auffassen, insbesondere einer isolirten Menge, falls Q nirgends dicht ist.**

Ist nämlich Q in einem Gebietsteil H überall dicht, so ist sie Ableitung jeder in H überall dichten Menge. Ist dagegen Q in H nirgends dicht und D wieder die zugehörige Gebietsmenge, so kann man stets in das Innere oder auf den Umfang von δ_N eine isolirte Menge so setzen, dafs deren Ableitung die auf dem Umfang von δ_N liegenden Punkte liefert.

Ferner ergiebt sich, dafs die oben (S. 79 u. 80) gemachten Ausführungen, die die Übertragung der dort genannten Begriffe auf perfecte lineare Mengen betreffen, ungeschmälert für perfecte Mengen eines C_ν Kraft behalten; ebenso auch der an sie anschliefsende Satz über die fortgesetzte Reduction einer perfecten, resp. abgeschlossenen Menge auf Teilmengen der gleichen Natur.

Endlich fliefst auch der von R. Baire aufgestellte Satz[1]) leicht aus unseren allgemeinen Entwicklungen. Er lautet, dafs die Projection einer ebenen nirgends dichten abgeschlossenen Menge T_2, die keine Strecke und kein Curvenstück enthält, auf einer Geraden wieder nirgends dicht und abgeschlossen ist. Dafs die projicirte Menge T_1 abgeschlossen ist, wurde schon oben bemerkt; dafs sie nirgends dicht ist, folgt so: Da die Bereiche δ_N abzählbar sind, und die Seiten eines jeden δ_N durch die Punkte von T in eine abzählbare Menge von punktfreien Intervallen zerfallen, so ergiebt sich auf der Geraden durch deren Projection ebenfalls eine abzählbare Menge punktfreier Intervalle. Da nun jeder innere Punkt eines solchen Intervalles der Menge T_1 nicht angehört, so folgt damit die Existenz von Punkten der Geraden, die nicht zu T_1 gehören; womit der Satz bewiesen ist.

Viertes Capitel.

Der Inhalt der Punktmengen.

Die Betrachtungen über den Inhalt der Punktmengen bilden ein Gebiet, auf dem mancherlei Controversen auszutragen waren. Einerseits begegnen wir hier Resultaten, die leicht paradox erscheinen konnten; andererseits hat die Inhaltsdefinition, wie jede mathematische Definition, zunächst einen gewissen subjectiven Charakter, und erst die aus ihr fliefsenden Folgerungen entscheiden darüber, ob sie den in der Sache ruhenden Zwecken gemäfs gewählt sind.

Historisch knüpft der Begriff des Inhalts einer Punktmenge P an den Integralbegriff an, insbesondere an die Frage, ob eine Function, die in den Punkten von P unstetig ist, integrirbar ist

1) Ann. di mat. (3) 3, S. 94.

oder nicht. Diesem Umstand verdankt der Inhaltsbegriff seine ursprüngliche Formulirung. Hankel ist der erste, der sich hiermit beschäftigt hat. Er teilt das Intervall τ, in dem die lineare Menge P liegt, in ν Intervalle, so dafs jeder Punkt von P innerer Punkt eines dieser Intervalle ist, und betrachtet als Inhalt der Punktmenge den Grenzwert, dem die Summe derjenigen Intervalle, in denen die Punkte von P liegen, bei Verkleinerung der einzelnen Intervalle zustrebt[1]. Dafs hier ein von der ursprünglichen Annahme der Intervalle unabhängiger Grenzwert vorliegt, wird durch die bekannte Schlufsweise gefolgert. Der bezügliche Beweis ist von O. Stolz[2]) und nach ihm von A. Harnack[3]) gegeben worden.

Die Hankel'sche Inhaltsdefinition kann auf Punktmengen eines beliebigen C_ν übertragen werden (2). Cantor ist es, der die bezüglichen Formulirungen zuerst in allgemeinster Form aufgestellt hat[4]). Er legt um jeden Punkt der Menge P eine Kugel von demselben Radius und betrachtet den Grenzwert derjenigen aus einer endlichen Zahl von Raumteilen bestehenden Summe, die durch das Innere der Kugeln dargestellt wird. Auf dem Boden dieser Definition hat man der Punktmenge ihre Grenzstellen von vornherein zuzuzählen, so dafs es sich nur um den Inhalt abgeschlossener Mengen handelt. Diese Festsetzung ist für den Zweck, für den die Inhaltsdefinition geschaffen wurde, sicher notwendig[5]); im übrigen aber liegt in ihr doch wieder ein willkürliches Element. Peano und nach ihm Jordan haben demgemäfs den Inhaltsbegriff dadurch schärfer zu formuliren gesucht, dafs sie beliebige Mengen ins Auge fassen und für den Inhaltsbegriff wie für das bestimmte Integral, dessen einfachsten Fall er ja darstellt, zwei verschieden definirte Grenzwerte einer ebenfalls endlichen Zahl von Summanden zu Grunde legen und demgemäfs den äufseren Inhalt von dem inneren unterscheiden (3).

Einen hiervon wesentlich abweichenden Standpunkt hat kürzlich E. Borel eingenommen[6]). Er sieht ebenfalls davon ab, der Menge P ihre Grenzpunkte hinzuzufügen, sieht aber überdies auch von der Forderung einer endlichen Menge von Gebieten ab, die alle Punkte einer Menge P enthalten[7]); er denkt sich jeden Punkt von P mit einem beliebigen Bereich umgeben und zieht den von ihnen erfüllten Raumteil, resp. dessen Grenze in Betracht (4). Eine Folge

1) Math. Ann. 20, S. 87 ff.
2) Math. Ann. 23, S. 152.
3) Math. Ann. 25, S. 241. Vgl. auch Pasch, Math. Ann. 30, S. 132.
4) Math. Ann. 23, S. 473.
5) Harnack hat zuerst auf den Einflufs hingewiesen, den die Grenzpunkte für den Inhaltsbegriff haben können. Math. Ann. 25, S. 241.
6) Leçons, S. 46 ff.
7) Auch dies findet sich bei Harnack a. a. O. bereits vorgebildet.

dieser Definition ist es, dafs alle abzählbaren Punktmengen den Inhalt Null haben, während dies nach der Hankel-Cantor'schen Definition nur dann der Fall sein kann, wenn die Mengen nirgends dicht sind. Die Differenz zwischen beiden Definitionen tritt naturgemäfs nur bei solchen Mengen hervor, bei denen der äufsere und innere Inhalt von einander verschieden sind.

Der erste allgemeinere Inhaltssatz stammt von Cantor[1]); er lautet (1), dafs jede lineare Menge, deren Ableitung abzählbar ist, den Inhalt Null besitzt[2]). Später hat Cantor den analogen Satz auch für Mengen eines beliebigen C_ν bewiesen. Hankel hatte irrtümlich geglaubt, dafs jede nirgends dichte lineare Menge den Inhalt Null hat[3]); ihm waren die perfecten Mengen, insbesondere ihr Zusammenhang mit den überall dichten Gebietsmengen, unbekannt geblieben. Der Hankel'sche Irrtum wurde zuerst von St. Smith aufgedeckt, der ein erstes Beispiel einer solchen Menge gab, deren Inhalt nicht Null ist[4]). Später haben auch du Bois-Reymond[5]), Harnack[6]), W. Veltmann[7]) und Volterra[8]) selbständig derartige Beispiele construirt. Veltmann hat auch bereits ein Beispiel einer ebenen Menge angegeben, die Inhalt hat. Ein erstes allgemeines Kriterium, wann eine lineare nirgends dichte Menge den Inhalt Null hat, ist von Harnack angegeben worden (5).

1. Der erste Cantor'sche Beweis des Satzes, dafs eine lineare Menge Q unausgedehnt ist, wenn Q' abzählbar ist, hat nicht allein historisches, sondern auch methodisches Interesse und mag daher hier eine Stelle finden. Der Einfachheit halber denke man sich die Menge Q im Intervall $0 \cdots 1$ enthalten, wohin man sie z. B. durch Ähnlichkeitstransformation projiciren kann. Der Beweis beruht darauf, dafs die zugehörige Intervallmenge $D = \{\delta\}$ abzählbar ist, während die Menge der Punkte der Einheitsstrecke die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt. Sei u die Gesamtsumme aller Intervalle δ, so ist zu zeigen, dafs $u = 1$ ist.

Ist x irgend ein Punkt der Strecke $0 \cdots 1$, so sei $s = f(x)$ die Summe aller Intervalle δ, die x vorangehen, mit der Mafsgabe, dafs, falls x ein innerer Punkt oder Endpunkt eines Intervalls ist,

---

1) Math. Ann. 21, S. 54 (1883).
2) Eine solche Menge heifst auch unausgedehnt oder inhaltslos. Bei Harnack heifst sie in wenig glücklicher Bezeichnung discret; du Bois nennt sie wegen ihrer Beziehung zum Integralbegriff integrirbar.
3) Math. Ann. 20, S. 88.
4) Proceedings of the Lond. math. Soc. 6, S. 148 (1875). Vgl. auch S. 101 dieses Berichts.
5) Math. Ann. 16, S. 128.
6) Math. Ann. 19, S. 239.
7) Zeitschr. f. Math. 27, S. 176 u. 199.
8) Giorn. di mat. 19, S. 80 ff. (1881).

dieses Intervall bis zum Punkt x in die Summe s eingehen soll. Diese Function $f(x)$ ist sicher eine stetige Function von x, da ja

$$f(x+h) - f(x) \leqq h$$

ist; insbesondere ist, falls x und $x+h$ innerhalb desselben Intervalls δ liegen, $f(x+h) - f(x) = h$. Demnach ist

$$\varphi(x) = x - f(x)$$

eine stetige Function, die innerhalb jedes Intervalls δ constant ist[1]) und die daher ihren Wert höchstens in den Punkten von Q ändern kann. Da nun Q abzählbar ist, so ist auch die Wertmenge von $\varphi(x)$ abzählbar. Nun ist

$$f(0) = 0,\ f(1) = u, \quad \text{also} \quad \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1 - u.$$

Als stetige Function von x mufs aber $\varphi(x)$ jeden Wert zwischen 0 und $1-u$ wirklich annehmen; wäre nun $u < 1$, so würde die Wertmenge von $\varphi(x)$ die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen, während sie doch, wie wir eben sahen, abzählbar ist.

2. Die allgemeine Inhaltsdefinition für eine im C_ν enthaltene abgeschlossene Punktmenge $P = \{p\}$ hat bei Cantor folgenden Wortlaut:

Man lege um jeden Punkt p eine ν-dimensionale Kugel mit dem Radius ϱ, der für alle Kugeln constant sein soll. Diese Kugeln erfüllen einen Raumteil $\Pi(\varrho, P)$, der ihr kleinstes gemeinsames Multiplum ist und der mit abnehmendem ϱ ebenfalls abnimmt. Für $\lim \varrho = 0$ convergirt daher $\Pi(\varrho, P)$ gegen eine bestimmte, niemals negative untere Grenze; diese ist der Inhalt von P und wird durch $J(P)$ bezeichnet.

Der wichtigste, für diesen Inhaltsbegriff bestehende Satz lautet:

I. Der Inhalt einer Punktmenge ist gleich dem ihrer Ableitung: $J(P) = J(P')$.

Die wiederholte Anwendung dieses Satzes, der sowohl den Schlufs von ν auf $\nu + 1$, wie auch den von $\{\nu\}$ auf ω gestattet, führt schliefslich zu der Folgerung, dafs

$$J(P) = J(P') = J(P^{(\alpha)})$$

ist, wo α die für P charakteristische Zahl ist (S. 68 u. 69). Ist nun zunächst $P^{(\alpha)} = 0$, also P' abzählbar, so ist auch der Inhalt von P gleich Null, also P unausgedehnt, d. h.:

II. Jede Punktmenge P eines C_ν, deren Ableitung P' abzählbar ist, hat den Inhalt Null.

Ist dagegen $P^{(\alpha)}$ perfect, so ist der Inhalt von P gleich dem einer perfecten Menge, so dafs die Inhaltsbestimmung nur für perfecte Mengen in Frage steht. Es folgt also weiter:

---

1) Vgl. auch die Erörterung dieser Functionsklasse in Abschnitt III, Cap. 4, wo die Relation $\varphi(x) = 0$ ebenfalls bewiesen wird.

III. Der Inhalt einer Menge P, deren Ableitung P' nicht abzählbar ist, ist gleich dem Inhalt der in P' enthaltenen perfecten Menge $P^{(\alpha)}$.

Für den Satz I hat Cantor folgenden Beweis gegeben. Es ist klar, daſs der Satz nur zu beweisen ist, falls P auch isolirte Punkte enthält. Man betrachte nun wieder für beliebiges ϱ den oben definirten Bereich $\Pi(\varrho, P')$. Dieser Bereich wird bei hinlänglich kleinem ϱ nur einen Teil des Bereiches $\Pi(\varrho, P)$ ausmachen, d. h. es ist

$$\Pi(\varrho, P) - \Pi(\varrho, P') > 0.$$

Ferner ist klar, daſs auſserhalb des Bereiches $\Pi(\varrho, P')$ nur eine endliche Anzahl isolirter Punkte von P liegt, da sie sonst eine Häufungsstelle besitzen müſsten. Ist M die von ihnen gebildete Menge, so kann man zunächst, nachdem eine Gröſse ε fest gewählt ist, ϱ so klein annehmen, daſs der Bereich $\Pi(\varrho, P - M)$ ganz innerhalb $\Pi(\varepsilon, P')$ liegt, so daſs also

$$\Pi(\varrho, P - M) < \Pi(\varepsilon, P')$$

ist. Es ist daher auch

$$\Pi(\varrho, P) - \Pi(\varrho, P') < \Pi(\varepsilon, P') - \Pi(\varrho, P') + \Pi(\varrho, P) - \Pi(\varrho, P - M),$$

und hieraus schlieſst Cantor durch Grenzübergang, indem er bei festem ε zunächst $\lim \varrho = 0$ werden läſst, daſs

$$J(P) = J(P')$$

ist. Daſs hier auch der Schluſs von $\{\nu\}$ auf ω gestattet ist, ist in diesem Fall unmittelbar evident.

Ich erwähne endlich noch folgenden Satz[1]):

IV. Ist Q eine abgeschlossene Menge, Q_ν Teilmenge von Q, und wird Q_ν mit wachsendem ν überall dicht in Q, so ist $\lim J(Q_\nu) = J(Q)$.

Denn es ist $J(Q_\nu) = J(Q_\nu')$, und wenn Q_ν mit wachsendem ν überall dicht in Q wird, so convergirt Q_ν' gegen Q selbst, woraus der Satz folgt.

3. Die von Peano[2]) und Jordan[3]) herrührenden Formulirungen lasse ich hier für den R_3 folgen.

Sei die Menge $P = \{p\}$ in einem endlichen Raumteil H enthalten, so construire man im R_3 irgend eine Gebietsteilung, z. B. eine solche in Würfel der Kante ε. Ist Σ_ε die Summe aller Würfel, deren sämtliche Punkte innere Punkte der Menge P sind, so convergirt diese Summe für $\lim \varepsilon = 0$ gegen einen bestimmten Grenzwert S, von dem man in bekannter Weise zeigt, daſs er von

1) Vgl. W. F. Osgood, Am. Journ. of Math. 19, S. 178.
2) Applicazioni geometriche del calc. infinit. Turin 1887, S. 153 ff.
3) Journ. de Math. (4) Bd. 8, S. 77 ff. (1892).

der Art der Gebietsteilung unabhängig ist[1]). Man fasse jetzt zweitens diejenigen Würfel der Kante ε ins Auge, die innere Punkte von P oder Punkte auf der Grenze von P enthalten[2]), so hat ihre Summe die Form $\Sigma_\varepsilon + \Sigma'_\varepsilon$ und convergirt ebenfalls gegen einen von der Gebietsteilung unabhängigen Grenzwert $S + S'$. Ist $S' = 0$, so nennen Jordan und Peano die Menge P mefsbar und S ihren Inhalt. Es convergirt also dann die Summe der Würfel, die die Punkte auf der Grenze enthalten, gegen Null. Ist dagegen $S' > 0$, so wird zwischen dem äufseren Inhalt $S + S'$ und dem inneren Inhalt S unterschieden; die Menge ist alsdann nicht mefsbar. Der äufsere Inhalt stimmt mit dem Cantor'schen Inhaltsbegriff überein.

Ein einfaches Beispiel einer nicht mefsbaren Menge bilden die rationalen Punkte eines Bereiches H; ihr äufserer Inhalt ist H, während der innere Null ist.

Ist der äufsere Inhalt einer Menge Null, so ist die Menge natürlich mefsbar und hat den Inhalt Null; es kann also die Bezeichnung unausgedehnt in dem oben benutzten Sinne für sie beibehalten werden.

Es scheint mir übrigens zweckmäfsig, die vorstehenden Inhaltsdefinitionen formal noch etwas abzuändern. Man denke sich die Menge P innerhalb eines Würfels w und in ihm wieder eine Würfelteilung mit der Kante ε. Für einen einzelnen dieser Würfel gilt dann, dafs entweder jeder innere Punkt von ihm zu P gehört, oder es gehört kein innerer Punkt zu P, oder es gehören endlich einige innere Punkte zu P. Ist Σ_ε die Summe der erstgenannten Würfel, sind Σ''_ε resp. Σ'_ε die beiden andern Summen, und ist $J(w)$ der Inhalt von w, so ist immer

$$\Sigma_\varepsilon + \Sigma'_\varepsilon + \Sigma''_\varepsilon = J(w),$$

und es gilt daher auch für die Grenzwerte die Gleichung

$$S + S' + S'' = J(w).$$

Ist jetzt $S + S' = 0$, so ist $S'' = J(w)$; die Summe der punktfreien Würfel convergirt also bei unausgedehnten Mengen in der That gegen $J(w)$, und umgekehrt.

Für den so bestimmten Inhaltsbegriff besteht, wie leicht ersichtlich, der folgende Satz:

V. Sind P und P_1 mefsbare Mengen ohne gemeinsame Punkte, so ist auch die Vereinigungsmenge (P, P_1) mefsbar, und ihr Inhalt gleich der Summe der Einzelinhalte.

Der gleiche Satz gilt auch für den inneren Inhalt zweier Mengen, für den äufseren dagegen trifft er nicht mehr zu. Ebenso-

1) Vgl. z. B. Peano, Atti di Torino 18, S. 439.
2) Das Genauere über diese Begriffe im vierten Abschnitt.

wenig braucht er für den inneren Inhalt unendlich vieler Mengen erfüllt zu sein.

4. Der vorstehende Satz ist es, den Borel[1]) zur Grundlage seiner Inhaltsdefinition gemacht hat. Er bezeichnet ihn als die wesentliche Eigenschaft des Inhaltsbegriffs und verlangt daher, die Inhaltsdefinition müsse so gebildet werden, dafs sie diese Eigenschaft ausdrückt. Falls daher das auf einer Strecke τ liegende Continuum C in zwei Punktmengen P und P_1 irgendwie gespalten wird, so soll

$$\tau = J(C) = J(P) + J(P_1)$$

sein. Hierzu fügt Borel die zweite Forderung, dafs diese Gleichung auch für jede abzählbare Menge von Punktmengen erfüllt sein soll. Da nun eine endliche Menge von Punkten stets den Inhalt Null hat, und jede abzählbare Punktmenge als Summe von abzählbar vielen endlichen Mengen darstellbar ist, so fliefst daraus die Folgerung, dafs jede abzählbare Menge den Inhalt Null besitzt. Nun nimmt freilich die zweite Forderung Borel's keineswegs die gleiche Stellung ein wie die erste. Sie hat zunächst nur den Charakter eines Postulats, da ja die Frage, ob eine Eigenschaft endlicher Summen auf unendlich viele Summanden ausdehnbar ist, nicht durch Festsetzung erledigt werden kann, sondern vielmehr der Untersuchung bedarf. Borel zeigt aber, dafs seine Definition in sich widerspruchsfrei ist.

Der oben bereits citirte Satz Borel's, dafs eine abzählbare Menge stets den Inhalt Null hat, ergiebt sich nun folgendermafsen: Der Einfachheit halber beweise ich ihn für eine lineare Menge

$$X = \{x_\nu\} = (x_1, x_2, x_3, \cdots x_\nu, \cdots),$$

die im Intervall $a \cdots b$ enthalten sei. Ist ε eine beliebig kleine Gröfse, so können wir doch stets eine unendliche Reihe von Gröfsen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots \varepsilon_\nu, \cdots$$

so bestimmen, dafs ihre Summe gleich ε ist. Nun construire man um jedes x_ν ein Intervall von der Breite ε_ν, so dafs x_ν im Innern des Intervalls liegt. Es werden dann einzelne dieser Intervalle ineinandergreifen[2]). Rechnen wir nun alle solchen Intervalle ε_ν als ein Intervall δ, so bilden diese Intervalle δ eine überall dichte Menge $D = \{\delta\}$, von der unmittelbar einleuchtet, dafs $\Sigma\delta < \varepsilon$ ist, d. h.:

VI. Jede auf $a \cdots b$ liegende abzählbare und überall dichte Menge kann so in Intervalle eingeschlossen werden, dafs jeder Punkt der Menge innerer Punkt eines Intervalls wird und die Intervallmenge einen beliebig kleinen Inhalt erhält.

1) Leçons etc., S. 46 ff.
2) Vgl. auch die genauere Darstellung auf S. 109.

Der gleiche Satz gilt offenbar für jede abzählbare Menge $P = \{p_\nu\}$ eines C_ν, falls man die Intervalle δ_ν durch Kugeln oder Würfel ersetzt, die um die Punkte p_ν gelegt werden.

5. Eine der wichtigsten Fragen ist die nach dem Inhalt der nirgends dichten perfecten Mengen T, insbesondere der linearen. Der innere Inhalt dieser Mengen ist stets Null, der äufsere Inhalt — und von ihm ist hier allein die Rede — wird durch den Wert von $\Sigma\delta_N$ bestimmt, denn dies ist der Grenzwert S'', gegen den die Summe Σ_s'' der punktfreien Bereiche in diesem Fall convergirt.

Da für die Anwendungen immer nur dieser äufsere Inhalt in Frage steht, so will ich ihn von nun an wieder kurz als den Inhalt von T bezeichnen und durch $J(T)$ ausdrücken.

Die zu T gehörige Intervallmenge denken wir uns jetzt wieder der Gröfse nach geordnet und durch $D = \Sigma\{\delta_\nu\}$ dargestellt. Bleibt durch Ausscheiden von δ_1 vom Bereich τ der Teilbereich τ_1 übrig, von ihm durch Ausscheiden von δ_2 der Teilbereich τ_2, u. s. w., so ist

$$\tau = \tau_1 + \delta_1 = \tau_2 + \delta_1 + \delta_2 = \cdots = \tau_\nu + \sum_{i=1}^{\nu}\delta_i.$$

Setzt man nun

$$\delta_1 = \lambda_1\tau,\ \delta_2 = \lambda_2\tau_1,\ \cdots\ \delta_\nu = \lambda_\nu\tau_{\nu-1},$$

so erhält man

$$\tau = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_\nu)\,\tau + \sum_{i=1}^{\nu}\delta_i,$$

und hieraus folgt der Satz:

VII. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die perfecte Menge T unausgedehnt ist, besteht darin, dafs das Product

$$(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_\nu)$$

den Grenzwert Null besitzt.

Dies wird besonders immer dann eintreten, falls alle λ_i einander gleich sind, oder falls dies wenigstens von einem gewissen Index an der Fall ist.

Der vorstehende Satz wurde für lineare Mengen von Harnack angegeben[1]; er gilt aber seiner Ableitung nach für Mengen T eines beliebigen C_ν, da ja für alle diese Mengen die Existenz einer zu ihnen gehörigen Menge $D = \{\delta_N\}$ nachgewiesen worden ist. Doch versteht sich diese Übertragung nicht ganz von selbst, da die zu einer Menge Q gehörige Bereichmenge $D = \{\delta\}$ nicht eindeutig bestimmt ist. Der Beweis, dafs für jede solche Menge D die Summen $\Sigma\delta_\nu$ und $\Sigma\varepsilon$ gegen denselben Grenzwert convergiren, läfst sich jedoch

1) Math. Ann. 19, S. 239.

einfach führen und mag daher unterbleiben. Ebenso convergirt auch jede andere Summe von Bereichen, die das von der Menge Q freie Gebiet überall dicht bedecken, gegen $\Sigma\varepsilon$, was sich ohne Schwierigkeit in zwingender Form nach den bekannten Methoden darlegen läſst.

Der obige Satz hat bisher meist nur für lineare Mengen Anwendung gefunden. Ich lasse für sie noch einige Formeln folgen, deren ich für spätere Zwecke bedarf. Wie früher (S. 77), setzen wir allgemein

$$\tau_N = \tau_{N,0} + \delta_N + \tau_{N,1}$$

und setzen ferner

$$\delta_N = \lambda_N \cdot \tau_N = \lambda_N^0 \cdot \tau_{N,0} = \lambda_N' \cdot \tau_{N,1},$$

alsdann ist λ_N immer ein echter Bruch, während λ_N^0 und λ_N' jeden beliebigen endlichen positiven Wert haben können. Wird nun noch

$$\Sigma\delta_N = \Sigma\lambda_N\tau_N \doteq \lambda^{(N)}\Sigma\tau_N$$

gesetzt, wo sich die Summation über alle 2^ν Gruppen N mit ν Indices erstreckt, so folgt:

$$\Sigma\tau_N = (1-\lambda)(1-\lambda')\cdots(1-\lambda^{(N-1)})\,\tau = \Lambda^{(N)}\tau,$$

und auch hier besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daſs T unausgedehnt ist, darin, daſs das Product $\Lambda^{(N)}$ gegen Null convergirt.

Eine Menge T, die in keinem Intervalle unausgedehnt ist, soll als **nirgends unausgedehnt** oder als **überall ausgedehnt** bezeichnet werden. Für sie muſs $\lambda^{(N)}$ mit wachsendem ν sicher gegen Null convergiren, da ja $\lambda^{(N)}$ einen endlichen Grenzwert haben soll. Doch ist damit nicht gesagt, daſs dies auch von jeder Reihe

$$\lambda,\ \lambda_i,\ \lambda_{ik},\ \cdots\ \lambda_N,\ \cdots$$

gilt, wie auch umgekehrt, falls T unausgedehnt ist, derartige Reihen existiren können, für die das zugehörige Product

$$\Lambda_N = (1-\lambda)(1-\lambda_i)(1-\lambda_{ik})\cdots(1-\lambda_N)$$

nicht gegen Null convergirt.

Für die Art und Weise, wie sich diese Folgen über die Menge T verteilen können, vermag ich die zureichenden Bedingungen nicht anzugeben, nur bemerke ich, daſs hierfür wesentlich die Werte von λ_N^0 und λ_N' in Frage kommen werden, sowie die gleichmäſsige oder ungleichmäſsige Convergenz. Eine Aufstellung solcher Bedingungen würde sehr erwünscht sein[1]).

6. Die ebenen und räumlichen Mengen erfordern noch eine nähere Untersuchung. Ihre Inhaltseigenschaften bilden nämlich die

---

1) Man vgl. die Beispiele im Abschnitt III, Cap. 4.

natürliche Grundlage für die Theorie des Doppelintegrals und der mehrfachen Integrale. In einer ebenen Menge Q, deren Inhalt $J(Q) = \varrho$ ist, können nämlich lineare Mengen enthalten sein, deren (linearer) Inhalt gröfser oder kleiner als ϱ ist, und das gegenseitige Verhältnis dieser Mengen ist es, auf dem die Theorie der bezüglichen Integrale beruht. Es besteht zunächst der folgende Satz:

VIII. Ist Q eine ebene unausgedehnte Menge, so bilden diejenigen Geraden einer jeden Parallelschar, auf der die Teilmenge von Q einen oberhalb einer Gröfse σ liegenden Inhalt hat, eine nirgends dichte unausgedehnte Menge.

Wir denken uns die Menge Q innerhalb irgend eines Rechtecks H, teilen die Seiten h_1 und h_2 in ν_1 resp. ν_2 Teile und ziehen die bezüglichen Parallelen. Sei ferner x_σ ein solcher Punkt von h_1, durch den eine Gerade geht, auf der $J(Q^x) > \sigma$ ist. Wäre nun die Menge $X_\sigma = \{x_\sigma\}$ nicht unausgedehnt auf h_1, und ϱ ihr Inhalt, so würde die Summe derjenigen Intervalle τ von h_1, in denen Punkte x_σ liegen, stets gröfser als ϱ bleiben. Andererseits liegt in jedem über einem solchen Intervall stehenden Parallelstreifen mindestens eine Gerade h^x, für die $J(Q^x) > \sigma$ ist. Daraus folgert man aber leicht, dafs bei jeder Teilung $\Sigma_s' > \sigma\varrho$ sein müfste, während doch Σ_s' bei hinreichend kleiner Teilung gegen Null convergirt.

Wichtiger noch ist der zweite Satz, der die Umkehrung des vorigen ausspricht. Er lautet:

IX. Ist Q eine ebene abgeschlossene Menge, und bilden diejenigen Geraden einer Parallelschar, auf denen die bezügliche Teilmenge von Q einen oberhalb einer Gröfse σ liegenden Inhalt hat, für jedes σ eine nirgends dichte unausgedehnte Menge, so ist auch Q unausgedehnt.

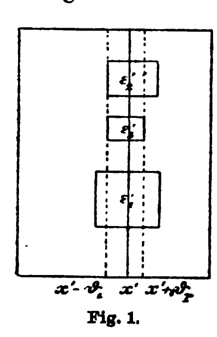


Fig. 1.

Wir denken uns wieder Q im Rechteck H, und es sei $X_\sigma = \{x_\sigma\}$ die von den bezüglichen Parallelen auf einer Rechteckseite bestimmte Menge, und $D = \{\delta_\nu\}$ die zugehörige Intervallmenge. Sei ferner (Fig. 1) x' ein Punkt innerhalb eines Intervalles δ_ν, so ist, wenn auf der durch ihn gehenden Geraden h' die Teilmenge Q' liegt, $J(Q') < \sigma$. Zur Menge Q' gehöre $E = \{\varepsilon_\nu\}$ als Intervallmenge. Alsdann wähle man die ν ersten Intervalle ε_i so, dafs

$$\varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \cdots + \varepsilon_\nu' > h_2 - \sigma''$$

ist, wo ε_i' wieder beliebig innerhalb ε_i liegt. Neben jedem ε_i' läfst sich nun nach links und rechts ein rechteckiger Streifen bestimmen, der keine Punkte q enthält; ist ϑ_l die kleinste dieser Breiten nach links und ϑ_r die kleinste nach rechts für die ν Intervalle ε_i', so erhält man auf diese Weise ein bestimmtes, den Punkt x' ein-

schliefsendes Intervall $x' - \vartheta_l \cdots x' + \vartheta_r$. Über ihm errichte man den zugehörigen Parallelstreifen. Ein solches endliches Intervall $\vartheta = \vartheta_l \cdots \vartheta_r$ gehört nun zu jedem inneren Punkt x' eines Intervalles δ_i, und wenn δ_i' innerhalb δ_i liegt, so folgt zunächst wieder aus dem Heine-Borel'schen Satz, dafs man zur Bedeckung jedes Intervalles δ_i' mit einer endlichen Zahl solcher Intervalle ϑ ausreicht[1]). Wenn man nun noch μ so bestimmt, dafs bei vorgegebenem σ'

$$\delta_1' + \delta_2' + \cdots + \delta_\mu' > h_1 - \sigma'$$

ist, so liegt in den über den Intervallen δ_i' construirten Parallelstreifen eine endliche Zahl punktfreier Bereiche η so, dafs

$$\Sigma\eta > (h_1 - \sigma')(h_2 - \sigma'')$$

ist. Da nun σ' und σ'' beliebig klein gemacht werden können, so ist damit der Satz bewiesen.

Die vorstehenden Sätze lassen sich übrigens auch in der Weise verallgemeinern, dafs man von Mengen Q handelt, die Inhalt besitzen. Ist $J(Q) = \varrho$, so kann die Menge X nicht einen Inhalt haben, der gröfser als ϱ ist, falls zu jedem x eine Parallele gehört, auf der $J(Q^x) \geqq \varrho + \sigma$ ist, und ebenso umgekehrt. Ebenso lassen sich die Sätze auf räumliche Mengen sowie auf Mengen eines beliebigen C_ν sinngemäfs übertragen.

Wichtig ist noch zu bemerken, dafs die vorstehenden Sätze versagen, falls man nicht mit abgeschlossenen Mengen operirt. Eine ebene oder räumliche Menge braucht nämlich nicht abgeschlossen zu sein, obwohl es eine Parallelschar geben kann, so dafs auf jeder dieser Parallelen die bezügliche lineare Menge selbst abgeschlossen ist. Solche Mengen kann man in mannigfacher Weise construiren, selbst so, dafs sie auf einer überall dichten Geradenschar perfect sind[2]).

---

1) Vgl. S. 51. Die Wirkung dieses Satzes besteht hier darin, es als unmöglich hinzustellen, dafs bei festgehaltenem σ entweder ν über jede Grenze wächst, oder ϑ_l und ϑ_r unter jede Grenze sinken, was man natürlich auch direct zeigen kann, indem man den Gedankengang dieses Beweises wiederholt. Ebenso fliefst die Existenz der endlichen Gröfsen ϑ_l und ϑ_r aus diesem Satz.

2) Ein einfaches Beispiel giebt Pringsheim, Ber. d. Münch. Akad. 1899, S. 50. Diejenigen Werte (x, y), die bei dyadischer Darstellung eine endliche und zwar die gleiche Zahl von Ziffern enthalten (z. B. $x = 0{,}011$ und $y = 0{,}101$), bilden eine Menge, von der auf jeder den Seiten parallelen Geraden nur eine endliche Anzahl liegt. Die Grenzpunkte der Menge erfüllen aber das ganze Rechteck. Ebenso für jedes andere Zahlsystem.

Fünftes Capitel.

Beispiele und Punktmengen besonderer Art.

Ich lasse zunächst die bemerkenswertesten Beispiele von Zahlenmengen und Punktmengen folgen, die bisher zu unserer Kenntnis gelangt sind. Die meisten dieser Punktmengen sind durch eigens erdachte Vorschriften zu bestimmten Zwecken construirt worden. Dabei hat es sich als sehr nützlich erwiesen, diese Vorschriften an die jedem Punkt zugehörige Decimalbruchdarstellung oder an eine ihr analoge Bestimmungsweise anzuschliefsen und Gesetze für die einzelnen Ziffern aufzustellen. Diese Methode geht meines Wissens wesentlich auf Peano zurück; er ist es auch, der zuerst statt des Decimalsystems die Einführung beliebiger anderer Zahlsysteme mit Erfolg benutzt hat[1]). Eine Verallgemeinerung hiervon ist diejenige Bestimmungsweise, die kürzlich Brodén benutzt hat und die darauf hinausläuft, für jede Stelle der Ziffernfolge eine andere Zahl als Basis des bezüglichen Zahlsystems zuzulassen.

Unter den allgemeinen Constructionsvorschriften erwähne ich auch hier die bereits oben (S. 78) erörterte Methode zur Herstellung nirgends dichter perfecter Mengen (2).

Am Schlufs des Capitels behandle ich (6) noch einige Fragen über gewisse besondere Kategorien von Punktmengen, die in neueren Arbeiten eine Rolle spielen, insbesondere die Erfüllung eines Intervalls mit einer unendlichen Menge perfecter Mengen.

1. Es ist leicht, eine Punktmenge P, insbesondere eine lineare, so zu bilden, dafs die ν-te Ableitung $P^{(\nu)}$ nur eine endliche Anzahl von Punkten enthält, also $P^{(\nu+1)} = 0$ ist. (Mengen erster Gattung und ν-ter Art.) So gab z. B. Ascoli die Menge[2])

$$P = \left\{\frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{5^{s_2}} + \frac{1}{7^{s_3}} + \frac{1}{11^{s_4}}\right\},$$

in der die s_i unabhängig von einander alle positiven ganzen Zahlenwerte annehmen, und für die, wie leicht ersichtlich, $P'''' = (0)$[3]) ist.

Eine Methode allgemeinerer Art zur Erzeugung solcher Mengen ist folgende[4]). Die Menge

$$P = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{\nu}, \cdots\right)$$

hat den Nullpunkt als Grenzpunkt. Setzt man in jedes Intervall $1/\nu \cdots 1/\nu+1$ eine Menge, die mit P ähnlich[5]) ist und an der

1) Vgl. z. B. Riv. di mat. 2. S. 41.
2) Ann. di mat. (2), Bd. 6, S. 56 (1875).
3) Dies bedeutet, dafs P'''' aus dem Nullpunkt besteht.
4) Vgl. Cantor in Math. Ann. 5, 129 (1872).
5) in dem S. 28 angegebenen Sinn.

Stelle $1/\nu + 1$ einen Grenzpunkt besitzt, so entsteht eine Menge Q, so dafs

$$Q' = P, \quad Q'' = (0)$$

ist. Jetzt bilde man eine neue Menge R, indem man in jedes Intervall $1/\nu \cdots 1/\nu + 1$ eine Menge setzt, die Q ähnlich ist, so wird

$$R' = Q, \quad R'' = P, \quad R''' = (0)$$

u. s. w.[1]). Man sagt noch, dafs in Q der Nullpunkt ein Grenzpunkt zweiter Ordnung ist, in R ist er ein Grenzpunkt dritter Ordnung u. s. w.[2]).

Du Bois-Reymond hat bemerkt[3]), dafs die Nullpunkte der Function

$$y = \sin(1/x)$$

eine Menge bilden, die P ähnlich ist, ebenso die Nullpunkte von

$$y = \sin\frac{1}{\sin(1/x)}$$

eine Menge, die Q ähnlich ist, und wenn man

$$y = \sin\frac{1}{y_1}, \quad y_1 = \sin\frac{1}{y_2}, \quad \cdots y_\nu = \sin\frac{1}{x}$$

setzt, so bilden die Nullpunkte von y eine Menge, für die der Punkt $x = 0$ ein Grenzpunkt $(\nu + 1)$-ter Ordnung ist.

Die Cantor'sche Methode läfst sich auch benutzen, um Mengen Q zu bilden, für die $Q^{(\omega)}$ existirt[4]). (Punktmengen zweiter Gattung gemäfs S. 60.) Man geht wieder von der Menge P aus und setzt in jedes Intervall $1/\nu \cdots 1/\nu + 1$ eine Menge P_ν, für die der Punkt $1/\nu + 1$ ein Grenzpunkt der ν-ten Ordnung ist. Ist Q die so definirte Menge, so enthält $Q^{(\nu)}$ jedenfalls die Punkte

$$\frac{1}{\nu + 1}, \frac{1}{\nu + 2}, \frac{1}{\nu + 3}, \ldots,$$

es ist also der Nullpunkt ein Grenzpunkt unendlich hoher Ordnung, und zwar ist

$$Q^{(\omega)} = (0).$$

Man kann auf diese Weise auch Mengen R definiren, für die nicht allein $R^{(\omega)}$, sondern auch noch weitere Ableitungen in beliebiger

1) Ähnlich bestimmte Punktmengen gab auch St. Smith; er stellte sie durch die Formel

$$P = \left\{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \cdots + \frac{1}{\nu_s}\right\}$$

dar, in der $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_s$ unabhängig von einander alle ganzen Zahlen annehmen (Proceed. of the Lond. Math. Soc. 6, S. 145; 1875).

2) Mengen, die in dieser Weise durch wiederholte Einschachtelung entstehen, gab auch Volterra; vgl. Giorn. di mat. 19, S. 78.

3) Journ. f. Math. 79, S. 36.

4) Math. Ann. 17. S. 358 (1880).

Menge existiren. Setzt man z. B. in jedes Intervall $1/\nu \cdots 1/\nu + 1$ eine Menge Q_ν, die der vorstehenden Menge Q ähnlich ist, und zwar so, dafs

$$Q_\nu^{(\omega)} = \frac{1}{\nu + 1}$$

ist, so ist

$$R^{(\omega)} = P, \quad R^{(\omega+1)} = (0)$$

u. s. w. u. s. w.

Interessante Beispiele von Mengen, die ziffernmäfsig definirt sind und Ableitungen transfiniter Ordnungen besitzen, hat Mittag-Leffler gegeben[1]). Setzt man

$$P_0 = (0),\ P_1 = \left\{\frac{1}{2^{m_1}}\right\},\ P_2 = \left\{\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}}\right\}, \cdots$$
$$P_\nu = \left\{\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\cdots+m_\nu}}\right\},$$

wo die m_i unabhängig von einander alle ganzen positiven Zahlen durchlaufen mit Einschlufs der Null, so ergiebt sich leicht
$P_1' = P_0,\ P_2' = (P_1,\ P_0), \cdots P_\nu' = \mathfrak{D}(P_{\nu-1},\ P_{\nu-2}, \cdots P_1,\ P_0)$
woraus zunächst wieder folgt, dafs

$$P_\nu^{(\nu)} = (0)$$

ist. Man setze ferner

$$Q = \left\{\frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu+m_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{\nu+m_1+\cdots+m_\nu}}\right\},$$

wo die m_i dieselbe Bedeutung haben, wie bisher, während ν alle ganzen positiven Zahlen mit Ausschlufs der Null annehmen soll, und betrachte zunächst die zu einem festen ν gehörige Menge

$$Q_\nu = \left\{\frac{1}{2^\nu}\left(1 + \frac{1}{1^{m_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_1+\cdots+m_\nu}}\right)\right\},$$

so ist dies eine Menge, die zu P_ν ähnlich ist[2]), und es wird daher

$$Q' = \mathfrak{D}(Q_1',\ Q_2',\ Q_3', \cdots).$$

Hieraus folgt leicht, dafs $Q^{(\nu)}$ jedenfalls die Punkte

$$\frac{1}{2^\nu},\ \frac{1}{2^{\nu+1}},\ \frac{1}{2^{\nu+2}}, \cdots$$

enthält, und daraus folgt weiter

$$Q^{(\omega)} = (0).$$

Auf ähnliche Weise construirt Mittag-Leffler auch eine Menge R, für die

$$R^{(\omega+\nu)} = (0)$$

1) Acta math. 4, S. 58, Anm.
2) Vgl. Anm. 5 auf S. 98.

ist. Diese Menge wird dargestellt durch

$$R = \Big\{ \frac{1}{2^{p_1}} + \frac{1}{2^{p_1+p_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{p_1+p_2+\cdots+p_r}} + \cdots + \frac{1}{2^{p_1+\cdots+p_r+\nu}}\Big(1 + \frac{1}{2^{m_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_1+\cdots+m_\nu}}\Big)\Big\},$$

in der die m_i und ν die oben angegebene Bedeutung haben, während die p_i, wie die m_i, alle ganzen positiven Zahlen mit Einschlufs der Null durchlaufen sollen.

Alle hier erwähnten Mengen sind naturgemäfs nirgends dicht und abzählbar.

2. Im historischen Interesse lasse ich hier dasjenige Beispiel einer nirgends dichten perfecten Menge folgen, das St. Smith gab[1]), um den oben erwähnten Hankel'schen Satz über den Inhalt solcher Punktmengen zu widerlegen. Man teile zunächst die Einheitsstrecke in m $(m > 2)$ gleiche Intervalle, hebe das letzte heraus und teile jedes der $m - 1$ übrigen wieder in je m gleiche Intervalle, lasse von ihnen das letzte wieder ungeteilt und teile jedes der je $m - 1$ übrigen wieder in m gleiche Teile u. s. w., so bilden die Teilungspunkte nebst ihren Grenzpunkten eine Menge $T = \{t\}$, und es beträgt die Summe der punktfreien Intervalle

$$\frac{1}{m} + \frac{m-1}{m^2} + \frac{(m-1)^2}{m^3} + \cdots = 1.$$

Die Menge hat also den Inhalt Null. Wird das Verfahren nun so abgeändert, dafs bei den einzelnen Teilungen aus je einem Intervall der Reihe nach $m, m^2, m^3, \cdots$ neue Teilintervalle entstehen, so ergiebt sich als Summe der punktfreien Intervalle

$$\frac{1}{m} + \frac{m-1}{m^3} + \frac{(m-1)(m^2-1)}{m^6} + \cdots < \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \cdots,$$

und diese Summe kann durch Vergröfserung von m beliebig klein gemacht werden[2]).

Wie bei Smith, so hat auch bei du Bois, Harnack, Veltmann[3]), Volterra, die nach ihm unabhängig von einander perfecte Mengen durch überall dichte Intervallverteilung construirt haben, der perfecte Charakter dieser Mengen zunächst keine Rolle gespielt, sondern nur der Wert ihres Inhalts und die Widerlegung des Hankel'schen Irrtums. Das erste bewufst construirte Beispiel einer nirgends dichten perfecten Menge T ist von Cantor gegeben worden; es wird von allen Zahlen

1) Proc. of the Lond. Math. Soc. 6, S. 148 (1875).

2) Ähnlich ist das von Volterra angegebene Beispiel construirt, Giorn. di mat. 19, S. 80 ff. Mengen dieser Art finden sich auch bei T. Brodén, Acta Univ. Lund. 8, S. 17 ff.

3) Zeitschr. f. Math., 27, S. 177 u. 199.

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \cdots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \cdots$$

gebildet, bei denen die Coefficienten c_ν irgend einen der Werte 0 oder 2 annehmen können[1]). Man kann diese Menge auch so definiren, dafs sie aus allen Zahlen eines triadischen Zahlsystems besteht

$$z = 0,\ c_1 c_2 c_3 \cdots$$

mit Ausnahme derjenigen, in deren Ziffernfolgen 1 vorkommt. Bei dieser Auffassung ist das Cantor'sche Beispiel einer grofsen Verallgemeinerung fähig, indem man für die Darstellung der Zahlen zwischen 0 und 1 von einem Zahlsystem mit beliebiger Basis ausgeht und die Zahlen beibehält, in deren Ziffernfolgen bestimmte Ziffern auftreten. Das einfachste Beispiel bilden diejenigen Zahlen des dekadischen Systems, deren Decimalbrüche nur die Ziffern 0 und 1 aufweisen, also alle Brüche

$$t = 0;\ a_1 a_2 a_3 \cdots \text{ für } a_i = 0 \text{ oder } 1. \qquad \text{(dekadisch)}$$

Die perfecte Natur dieser Menge T ist insbesondere leicht so erkennbar, dafs man jede Ziffernfolge zunächst dyadisch liest, wie es bereits auf S. 64 geschehen ist. Sie stellen dann die sämtlichen Punkte z einer Einheitsstrecke dar, und es ist T das Abbild der Menge Z aller Punkte z. Zum Unterschied von den früheren Ausführungen wird aber hier jeder Punkt r, der einem endlichen Dualbruch entspricht, doppelt dargestellt und es besitzt daher ein solcher Punkt r zwei verschiedene Bildpunkte t und t'. Die so bestimmten Intervalle $t \cdots t' = \delta$ sind die punktfreien Intervalle der Menge T; wir treffen hier also wieder auf diejenige Abbildung, die durch Beziehung der Mengen $R = \{r\}$ und $D = \{\delta\}$ auf einander vermittelt wird, analog wie es oben (S. 79) der Fall war.

Der Inhalt dieser Menge ist Null, ebenso der der Cantor'schen Menge, da für sie alle λ_N constant sind[2]). Das gleiche gilt von dem einfachen Beispiel, das Harnack später für Zwecke der Integralrechnung construirt hat[3]), und das ich deshalb anführe; es erfüllt eine Strecke von der Länge $^2/_3$ und entspricht den einfachen Werten

$$\delta = \frac{1}{3},\ \delta_N = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{2\nu}},\ \tau_N = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{2\nu-1}},\ \lambda_N = \frac{1}{2}.$$

Beispiele von Mengen, deren Inhalt ausgedehnt ist, werden uns noch später mehrfach begegnen (Abschnitt III, Cap. 4).

3. Eine Verallgemeinerung dieser Beispiele bilden diejenigen Punktmengen, die Brodén[4]) kürzlich aufgestellt hat, um sie für die

1) Math. Ann. 21, S. 590.

2) Im Beispiel Cantor's ist $\lambda_N = \frac{1}{3}$, für das andere $\lambda_N = \frac{4}{45}$.

3) Math. Ann. 24, S. 227.

4) Math. Ann. 51, S. 302.

Theorie der reellen Functionen einer Variablen zu verwenden. Sie stellen die Zahlen ebenfalls durch eine unendliche Ziffernfolge dar und lassen sich so auffassen, dafs sie kein festes Zahlsystem benutzen, vielmehr die Basis des Zahlsystems für jede Ziffer eine andere sein darf[1]). Dies geschieht wie folgt: Sei

$$l_1, l_2, l_3, \cdots$$

eine unendliche Reihe ganzer positiver Zahlen, so dafs jedes $l_i \geqq 2$ ist, alsdann kann man jede Zahl x des Intervalls $0 \cdots 1$ in der Form

$$x = \frac{\varepsilon_1}{l_1} + \frac{\varepsilon_2}{l_1 l_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_\nu}{l_1 l_2 \cdots l_\nu} + \cdots$$

darstellen, wo $0 \leqq \varepsilon_\nu < l_\nu$ ist, und umgekehrt; insbesondere ist x ein rationaler Wert r, falls von einem bestimmten Index an alle $\varepsilon_i = 0$ sind. Es ist andererseits auch

$$x = 1 - \frac{\eta_1}{l_1} - \frac{\eta_2}{l_1 l_2} - \cdots - \frac{\eta_\nu}{l_1 l_2 \cdots l_\nu} - \cdots,$$

wo allgemein $\eta_\nu + \varepsilon_\nu = l_\nu$ ist, und bei dieser Darstellung ist x rational, falls von einem gewissen Index an alle $\eta_\nu = l_\nu - 1$ sind. Wir finden also auch hier eine Menge $R = \{r\}$, deren Individuen eine doppelte Zifferndarstellung bei fest gegebenen l_ν zulassen. Nimmt man nun insbesondere an, dafs alle $\varepsilon_\nu \leqq e$ sind, wo e eine beliebige, übrigens feste Zahl bedeutet, so bilden wieder die zugehörigen Werte x eine nirgends dichte perfecte Menge $T^{(e)}$. Setzt man nämlich $l_1 l_2 \cdots l_\nu = L_\nu$, und setzt für beliebige aber feste ε_i

$$x' = \frac{\varepsilon_1}{l_1} + \frac{\varepsilon_2}{l_1 l_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_\nu}{L_\nu} + \frac{e}{L_{\nu+1}} + \frac{e}{L_{\nu+2}} + \cdots$$

$$x'' = \frac{\varepsilon_1}{l_1} + \frac{\varepsilon_2}{l_1 l_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_\nu + 1}{L_\nu}$$

so sieht man leicht, dafs das Intervall $x' \cdots x'' = \delta$ von Punkten der Menge frei bleibt, während die Endpunkte der Menge angehören. Den Mengen dieser Art läfst sich ein beliebiger Inhalt geben.

Ein einfaches Beispiel hierfür bildet die von Liouville angegebene Menge, für die $L_\nu = 10^{\nu !}$ ist, und die durch

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^{1\cdot 2}} + \frac{\alpha_3}{10^{1\cdot 2\cdot 3}} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{10^{\nu !}} + \cdots$$

dargestellt ist, mit der Mafsgabe, dafs alle α_ν unter einer bestimmten Gröfse g bleiben, z. B. $\alpha_\nu \leqq 9$. Diese Menge hat insbesondere die Eigenschaft, dafs alle ihre Elemente transcendent sind, und ist zu diesem Zweck von Liouville aufgestellt worden. In Folge eines a. a. O. bewiesenen Satzes[2]) kann man nämlich, falls ξ Wurzel einer

1) Diesen Gedanken finde ich zuerst bei Straufs, Acta math. 11, S. 13.

2) Journ. de math. 16, S. 133. Vgl. auch Lerch, Prager Athenaeum. Bd. 3, S. 236 (1886). (Böhmisch.)

algebraischen Gleichung ν-ten Grades ist, und $p:q$ ein in der Nähe von ξ liegender rationaler Bruch, einen hinreichend grofsen Wert Q so finden, dafs für jedes $q > Q$

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| > \frac{1}{q^{\nu+1}}$$

ist. Wenn man daher umgekehrt unbegrenzt grofs werdende Zahlen q angeben kann, für die

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| < \frac{1}{q^{\nu+1}}$$

ist, so kann ξ nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung ν-ten Grades sein, und wenn dies für jedes ν möglich ist, so ist ξ notwendig transcendent. Setzt man nun in dem obigen Beispiel

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^{1\cdot 2}} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{10^{\nu!}},$$

so dafs $q = 10^{\nu!}$ ist, so folgt:

$$x - \frac{p}{q} < \frac{\alpha_{\nu+1}}{q^{\nu+1}} + \cdots, \text{ d. h. } < \frac{1}{q^{\nu+1}}.$$

Es giebt also für jedes ν Werte q, die die obige Ungleichung nicht erfüllen, so dafs x transcendent sein mufs.

Borel knüpft hieran folgende Bemerkung[1]). Legt man um jeden rationalen Punkt p/q der Einheitsstrecke ein Intervall

$$\frac{p}{q} - \lambda \frac{1}{q^3} \cdots \frac{p}{q} + \lambda \frac{1}{q^3} \qquad \lambda \leqq 1$$

von der Länge ε, so werden diese Intervalle einander wieder teilweise überdecken und in dem S. 93 genannten Sinn eine überall dichte Intervallmenge $D = \{\delta\}$ bestimmen. Nun ist

$$\Sigma\varepsilon < \lambda\Sigma(q-1)\frac{2}{q^3} < 2\lambda\Sigma\frac{1}{q^2}$$

und kann daher durch geeignetes λ beliebig klein gemacht werden. Die Intervalle liefern also ein Beispiel zu dem oben erwähnten Borel'schen Inhaltsbegriff und dem für ihn geltenden Satz.

Die so definirte Intervallmenge $D = \{\delta\}$ bestimmt andererseits eine abgeschlossene Menge $Q_1 = \{q_1\}$, so dafs für jeden Punkt q_1

$$\left| \frac{p}{q} - q_1 \right| > \frac{\lambda}{q^3}$$

ist. Man schliefst hieraus noch leicht, dafs jeder Punkt x der oben betrachteten transcendenten Menge innerer Punkt eines Intervalles δ ist, welches auch der Wert von λ sein mag, wie aus der für den Punkt x bestehenden Gleichung unmittelbar folgt.

1) Leçons etc., S. 44.

4. Specielle Beispiele ebener oder räumlicher nirgends dichter Mengen sind bisher nicht viele vorhanden. Die Methoden, die an die Decimalbruchdarstellung anknüpfen, sind auch hier anwendbar, falls man sie auf beide Coordinaten x und y überträgt. Ein erstes Beispiel einer ebenen nirgends dichten perfecten Menge, die nicht unausgedehnt ist, gab Veltmann[1]). Im übrigen ist zu bemerken, daſs diese Mengen hauptsächlich in der Theorie der Functionen einer complexen Variablen auftreten; sie können daher an dieser Stelle nur summarisch erwähnt werden[2]). Ebenso muſs hier die Bemerkung genügen, daſs auch die Curvenmengen bereits nach den Methoden der Mengenlehre untersucht worden sind[3]). Auf ein sehr merkwürdiges Auftreten solcher Curvenmengen, die ein genaues Analogon zu den nirgends dichten perfecten linearen Punktmengen bilden, ist kürzlich Hadamard[4]) geführt worden und zwar bei Untersuchungen über den Verlauf der geodätischen Linien auf mehrfach zusammenhängenden krummen Flächen.

5. Für die Theorie der reellen Functionen einer Variablen ist es von Wichtigkeit, das Continuum in Punktmengen zu spalten, die sämtlich überall dicht liegen und die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen[5]). Mit der allgemeinen Theorie dieser Punktmengen werden wir uns unten beschäftigen; hier führe ich zunächst einige Beispiele an.

Beispiele dieser Art hat zuerst T. Brodén construirt und zwar auf mannigfache Weise[6]). Man gehe z. B. von der Menge $Z = \{z\}$ aller Zahlen der Einheitsstrecke aus und stelle sie wiederum durch einen unendlichen Dualbruch

$$z = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots \qquad a_i = 0 \text{ oder } 1$$

dar, wo der Fall, daſs alle a_i von einem bestimmten an gleich Null sind, ausgeschlossen ist. Nun sei L eine beliebige divergente Reihe gegen Null abnehmender Gröſsen $l_0, l_1, l_2, \cdots$. Ist $\vartheta < 1$, so kann man wachsende Zahlen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \cdots$ so finden, daſs

$$l_{\nu_{i+1}} < \vartheta l_{\nu_i}$$

ist, und daher $l_{\nu_1}, l_{\nu_2}, l_{\nu_3}, \cdots$ eine convergente Reihe L_c bilden. Wird jetzt dieser Reihe eine Zahl z_c so zugeordnet, daſs

$$a_{\nu_1} = a_{\nu_2} = a_{\nu_3} = \cdots = 1$$

ist, während die übrigen $a_i = 0$ sind, so hat die Menge $Z_c = \{z_c\}$

---

1) Zeitschr. f. Math. 27, S. 178 u. 313.

2) Ein einfach construirtes Beispiel findet sich bei Mittag-Leffler, Acta Math. 4, S. 23, Anm.

3) Genauer werde ich hierauf im vierten Abschnitt eingehen.

4) Journ. de math. (5) 4, S. 67 ff.

5) Vgl. besonders Abschnitt III, Cap. 2 u. 3.

6) Journ. f. Math. 118, S. 29. Vgl. auch Bih. Svensk. Vet. Handl. 23, I, Nr. 2 und Öfvers. af Stockh. Vet. Ak. Förhandl. 1896, Nr. 8.

dieser Zahlen die Mächtigkeit $\mathfrak{z}_c = \mathfrak{c}$. Es ist nämlich jede Teilreihe einer Reihe L_c ebenfalls convergent, und da die Gesamtheit dieser Teilreihen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ hat, so ist auch $\mathfrak{z}_c = \mathfrak{c}$. Jeder Reihe L_c entspricht andererseits eine divergente Restreihe L_d von L, und es besitzen daher auch die ihnen entsprechenden Zahlen z_d die Mächtigkeit $\mathfrak{z}_d = \mathfrak{c}$. Die so definirten Mengen liegen aber auch überall dicht, denn in der Nähe einer jeden Zahl z, die einer endlichen Ziffernfolge entspricht, können sowohl rechts, wie links Zahlen z_c resp. z_d angegeben werden.

Ein anderes Beispiel dieser Art erhält man aus den oben (S. 103) erwähnten Brodén'schen Mengen, falls man $\lim l_\nu = \infty$ setzt und dann die Mengen $T_1, T_2, \cdots$ betrachtet, die einer Reihe unbegrenzt wachsender Gröfsen $e_1 < e_2 < \cdots$ entsprechen. Die so entstehende Gesamtmenge $\mathfrak{M}\{T_\nu\}$, die wir auch kürzer durch $\{T_\nu\}$ bezeichnen, teilt das Continuum in der verlangten Weise[1]).

Eine Methode, die sogar zu beliebig vielen Teilmengen dieser Art führt, ist folgende. Seien wieder $Z = \{z\}$ die Zahlen der Einheitsstrecke, die man in irgend einem Zahlsystem, z. B. im dekadischen, derart darstelle, dafs die endlichen Decimalbrüche ausgeschlossen werden. Nun sei Z_1 die Menge aller derjenigen Zahlen, die unendlich oft die Ziffer 9 enthalten, mit Ausschlufs der Zahlen $Z' = \{z'\}$, bei denen von einer bestimmten Stelle an nur die 9 vorkommt, und es sei Z_2 ihre Complementärmenge. Alsdann ist nicht allein Z_1 überall dicht, sondern auch Z_2, da ja Z_2 die überall dichte Menge Z' als Teilmenge enthält. Es ist aber auch

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{c} \text{ und } \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{c}.$$

Schreibt man nämlich eine Zahl z_1 in der Form

$$z_1 = 0,\ (a_1)(a_2)(a_3)\ \cdots,$$

wo jedes (a_i) entweder 9 ist, oder eine Gruppe von Ziffern, in der 9 nicht vorkommt, so sieht man unmittelbar, dafs Z_1 der Menge aller unendlichen dyadischen Brüche äquivalent ist, woraus $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{c}$ folgt. Andererseits enthält Z_2 als Teilmenge alle Zahlen, in denen nur die Ziffern 1, 2, $\cdots$ 8 auftreten, und es ist daher auch $\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{c}$.

Man kann nun die Spaltung von Z durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens noch weiter treiben. Von Z_2 spalte man jetzt die Menge Z_2' ab, in der die Ziffer 8 unendlich oft auftritt, so ist auch diese, da ihre ersten ν Ziffern für jedes ν unbeschränkt sind, notwendig überall dicht, und die Restmenge Z_3 ist es ebenfalls, da in ihr wieder Z' als Teilmenge existirt. Zugleich sieht man auch, dafs beide Mengen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen.

So kann man fortfahren, und da man die Basis des Zahlsystems

1) Math. Ann. 51, S. 302 ff.

beliebig wählen kann, so kann man die Einheitsstrecke in beliebig viele Mengen dieser Art spalten.

6. Wir haben im Vorstehenden eine unendliche Menge

$$\mathfrak{M}\{T_\nu\} = \{T_\nu\}$$

nicht abzählbarer abgeschlossener Mengen kennen gelernt, deren jede nirgends dicht ist, und die in ihrer Gesamtheit das Intervall, in dem sie enthalten sind, überall dicht erfüllen. Die Natur dieser Mengen und ihrer Complementärmenge ist von principiellerer Wichtigkeit. Sie bilden für verschiedene Sätze der Analysis die Grundlage der Schlüsse und erfordern daher eine nähere Erörterung. Ich zeige zunächst, dafs man solche Mengen auch so construiren kann, dafs jede von ihnen den Inhalt Null hat.

Seien also im Intervall $a \,..\, b = \tau$

$$T', T'', \ldots . T^{(\lambda)}, \ldots$$

die bezüglichen Mengen, so können wir jedenfalls zeigen, dafs es für beliebig gegebenes λ erreicht werden kann, dafs $I(T^{(\lambda)}) = 0$ ist, resp. dafs sich die zu $T^{(\lambda)}$ gehörige freie Intervallsumme von dem Gesamtintervall τ um beliebig wenig unterscheidet und zugleich jedes einzelne freie Intervall beliebig klein wird. Ein mehreres läfst sich aber auch der Natur der Sache nach nicht erreichen.

Der Einfachheit halber setzen wir unsere Mengen als perfect voraus. Ferner seien

$$D' = \left\{\delta'_\nu\right\}, \quad D'' = \left\{\delta''_\nu\right\}, \; \ldots\ldots \; D^{(\lambda)} = \left\{\delta^{(\lambda)}_\nu\right\}, \ldots$$

die zugehörigen Intervallmengen, und es seien

$$\delta', \delta'', \ldots\ldots \delta^{(\lambda)}, \ldots$$

ihre gröfsten Intervalle; ist alsdann $\varepsilon' > \varepsilon'' > \cdots$ eine Reihe von Gröfsen, so dafs $\lim \varepsilon^{(\lambda)} = 0$ ist, so mufs bewirkt werden, dafs

$$\delta' < \varepsilon', \quad \delta'' < \varepsilon'', \; \ldots . \; \delta^{(\lambda)} < \varepsilon^{(\lambda)} \ldots$$

ist. Ist nun σ beliebig vorgegeben, so bestimmen wir die Gröfsen $\sigma', \sigma'' \ldots\ldots$ so, dafs

$$\sigma > \sigma' + \sigma'' + \cdots\cdots + \sigma^{(\lambda)} + \cdots .$$

ist, und construiren zunächst eine Menge T', so dafs $I(T') = 0$ ist, resp. dafs $\delta' < \varepsilon'$ und zugleich

$$\tau > \sum_1^{\nu'} \delta'_i > \tau - \sigma'$$

ist, was immer möglich ist. Jetzt setzen wir in jedes Intervall δ'_i eine perfecte Menge T'_i, so dafs, wenn wieder

$$\sigma'' > \sigma'_1 + \sigma'_2 + \cdots + \sigma'_\mu + \cdots\cdots$$

gesetzt wird, $I(T_i') = 0$ ist, resp. ν_i' Intervalle der zu T_i' gehörigen Intervallmenge D_i' so gefunden werden können, dafs sich ihre Summe von δ_i' um weniger als σ_i' unterscheidet, so dafs

$$\delta_i' > \sum_1^{\nu_i'} \delta_{ik}' > \delta_i' - \sigma_i'$$

ist. Alsdann bestimmen die so definirten Mengen T_i', resp. die Intervallmengen D_i' Gesamtmengen

$$D'' = \{D_i'\} \quad \text{und} \quad T'' = \{T_i'\},$$

so dafs auch $I(T'') = 0$, resp.

$$\tau > \sum_1^{\nu''} \delta_i'' > \tau - \sigma''$$

ist; und dies kann auch so geschehen, dafs $\delta'' < \varepsilon''$ ist. In dieser Weise kann man fortfahren, womit die Behauptung erwiesen ist.

Von der Complementärmenge M, die zu $\mathfrak{M}\{T^{(\lambda)}\}$ gehört, gilt noch der Satz, dafs sie die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ hat. Jeder Punkt von M ist nämlich innerer Punkt je einer unbegrenzten Reihe von Intervallen

$$\delta_\nu', \; \delta_{\nu\mu}'', \; \delta_{\nu\mu\lambda}''' \cdots$$

mit beliebigen Indices $\nu, \mu, \lambda \cdots$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Dieser Satz gilt augenscheinlich auch, wenn die Mengen $T^{(\lambda)}$ beliebigen Inhalt haben, falls sie nur nirgends dicht sind, da er ja nur mit den punktfreien Intervallen operirt. Also folgt:

I. Sind $Q, Q_1, Q_2, \cdots Q_\nu, \cdots$ nirgends dichte Mengen, von der Art, dafs jede die vorhergehende als Teilmenge enthält, und dafs $\mathfrak{M}\{Q_\nu\} = \{Q_\nu\}$ im Intervall τ überall dicht ist, so hat die Complementärmenge M von $\{Q_\nu\}$ die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$[1]).

Ein Beispiel zu diesem Satz bilden einerseits die Brodén'schen Mengen T_ν (S. 106), andererseits aber auch diejenigen Mengen des obigen Borel'schen Beispiels, die man erhält, wenn man der Gröfse λ eine unendliche Reihe gegen Null convergirender Werte beilegt.

7. Die durch dieses Beispiel charakterisirte Mengengattung hat sich als besonders wichtig für die Analysis herausgestellt und darf deshalb eine genauere Erörterung beanspruchen.

Mit Baire bezeichnen wir noch die Menge $\mathfrak{M}\{Q_\nu\} = \{Q_\nu\}$ als Menge erster Kategorie. Aus ihrer Definition folgt sofort, dafs das Continuum keine Menge erster Kategorie ist, und daraus folgt weiter der Satz:

II. Die Complementärmenge einer Menge erster Kategorie ist selbst keine Menge erster Kategorie.

1) Vgl. Baire, Ann. di mat (3), Bd. 3, S. 67 (1899).

Mengen dieser Art bezeichnet Baire als Mengen zweiter Kategorie. Zu bemerken ist, dafs der hier zu Tage tretende Unterschied mit dem Mächtigkeitsbegriff nichts zu thun hat, sondern nur mit der Raumerfüllung.

Eine Menge zweiter Kategorie hat zwar nach Satz I stets die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, es kann aber auch eine Menge erster Kategorie die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ haben.

Sei nun $X = \{x\}$ eine im Intervall τ überall dichte Menge und X_g ihre Complementärmenge. Wenn nun — wie bei den Mengen Borel's — zu jedem Punkt x von X ein ihn einschliefsendes Intervall ε gehört, so kann zunächst auch jeder Punkt von X_g innerer Punkt eines Intervalles ε sein. Ist dies nicht der Fall, giebt es also Punkte von X_g, die nicht innere Punkte eines Intervalls ε sind, so ist die von ihnen gebildete Menge Q, falls sie unendlich ist, notwendig abgeschlossen und nirgends dicht. Die Menge Q kann auch perfect sein, obwohl dies im allgemeinen nicht der Fall sein wird. Jedenfalls gehört zu ihr eine Menge $D = \{\delta\}$, die mit der S. 93 erwähnten Menge identisch ist, so dafs jeder innere Punkt eines Intervalles δ auch innerer Punkt von Intervallen ε ist. Wir sprechen die Existenz dieser Mengen durch folgenden Satz aus, der das Gegenstück des Heine-Borel'schen Satzes von S. 51 ist:

III. Gehört zu jedem Punkt x einer im Intervall $a \ldots b$ überall dichten Punktmenge $X = \{x\}$ ein ihn einschliefsendes Intervall ε, und ist nicht jeder Punkt von $a \ldots b$ innerer Punkt eines solchen Intervalles, so bestimmen die Intervalle ε eine endliche oder abgeschlossene Menge Q, von der Art, dafs kein Punkt von Q innerer Punkt eines Intervalles ε ist, während dies für jeden Punkt der Complementärmenge von Q der Fall ist.

Falls nun die zu jedem Punkt von X gehörigen Intervalle ε veränderlicher Natur sind und jedes von ihnen Werte $\varepsilon' > \varepsilon'' > \cdots$ annimmt, die gegen Null convergiren, so ergeben sich die Mengen

$$D', D'', D''', \ldots \quad \text{resp.} \quad Q', Q'', Q''', \ldots,$$

und es ist, wie im vorstehenden, leicht beweisbar, dafs diese Mengen bei geeigneter Beschaffenheit der Intervalle ε resp. von $\Sigma\varepsilon$ die Strecke $a \ldots b$ allmählich überall dicht bedecken, so dafs, wenn wieder

$$C = \mathfrak{M}\{Q^{(\nu)}\} + M$$

gesetzt wird, die Menge M eine Punktmenge zweiter Kategorie ist.

Der Satz bleibt übrigens auch dann in Geltung, wenn ein Intervall ε, das zu einem Punkt x von X gehört, nicht den Punkt x einschliefst, sondern in ihm beginnt, falls nur die Punkte x und damit auch die Intervalle ε überall dicht liegen. Die vorstehenden Resultate gelten also für jede beliebige Menge $E = \{\varepsilon\}$

überall dichter Intervalle, wie diese Intervalle auch zu einander liegen mögen, resp. für jede aus derartigen Mengen gebildete Gesamtmenge $\{E^{(\nu)}\}$.

Ich werde die Mengen $E = \{\varepsilon_\nu\}$ sowie die durch sie bestimmten Mengen Q resp. $\{Q^{(\nu)}\}$ im folgenden als Borel'sche Mengen bezeichnen.

Über Mengen zweiter Kategorie führe ich noch folgenden Satz an:

IV. Die gemeinsamen Punkte zweier Mengen zweiter Kategorie bilden ebenfalls eine Menge zweiter Kategorie.

Ist nämlich M die eine dieser Mengen, und ist sie Complementärmenge von $\{Q^{(\nu)}\}$, die andere M_1 Complementärmenge von $\{Q_1^{(\nu)}\}$, so bilden auch die Mengen

$$\mathfrak{M}(Q', Q_1'),\quad \mathfrak{M}(Q'', Q_1''),\ \cdots\ \mathfrak{M}(Q^{(\nu)}, Q_1^{(\nu)}),\ \cdots$$

in ihrer Gesamtheit eine Menge erster Kategorie, woraus der Satz unmittelbar folgt.

Endlich noch eine letzte Bemerkung. Keine der beiden Arten von Punktmengen, zu denen wir hier gelangt sind, nämlich die Menge $\mathfrak{M}\{Q^{(\nu)}\}$, und ihre Complementärmenge M, ist abgeschlossen[1]). Sie stellen also allgemeine Vertreter der in (5) an Beispielen behandelten Mengengattung dar. In der That bilden sie auch diejenigen Typen, die bei Functionen reeller Variablen überall da auftreten, wo man zu Mengen der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ gelangt, die nicht abgeschlossen sind. Es würde zu untersuchen sein, ob jede überall dichte nicht abgeschlossene Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ stets eine Menge erster oder zweiter Kategorie ist. Ich muſs mich jedoch begnügen diese Frage anzudeuten.

Da die vorstehenden Betrachtungen nur mit den Intervallen δ operiren, so lassen sie sich ohne Ausnahme auf Mengen eines beliebigen C_ν übertragen. Man braucht unter den δ nur die entsprechenden Bereiche zu verstehen, und alles bleibt in Geltung.

8. Auch die Begriffe der Mengen erster und zweiter Kategorie sind, wie ich noch ausdrücklich begründen will, nicht an das Continuum gebunden; sie lassen sich für jede perfecte Menge T definiren. Ist U eine in T überall dichte Menge, und gehört zu jedem Punkt u ein Intervall oder Bereich δ, so kann man wiederum die Menge aller derjenigen Punkte ins Auge fassen, die nicht innere Punkte eines Bereiches δ sind, und sie muſs wieder eine abgeschlossene Menge Q sein. Allerdings enthält jetzt Q im allgemeinen ganze Intervalle resp. Gebiete. Nun betrachten wir die Menge

$$Q_t = \mathfrak{D}(Q, T);$$

1) Eine unendliche Menge abgeschlossener Mengen braucht also nicht selbst abgeschlossen zu sein. Eine endliche Menge abgeschlossener Mengen ist jedoch stets abgeschlossen.



sie ist abgeschlossen und zugleich Teilmenge von T, sie stellt daher das Analogon der früheren Mengen Q bezüglich T dar. Damit ist aber die Behauptung erwiesen. Denn wir können jetzt wiederum eine Gesamtmenge $\{Q_t^{(\nu)}\}$ definiren, und erhalten in ihrer Complementärmenge bezüglich T eine in T überall dichte Menge[1]), die als Menge zweiter Kategorie mit Bezug auf T zu bezeichnen ist.

Hier wie auch sonst tritt uns also eine wichtige Thatsache als sozusagen invariantes Resultat entgegen. Es ist eine gewisse Gleichwertigkeit aller perfecten Mengen, resp. der Umstand, dafs alle wichtigen Eigenschaften und Begriffe der Punktmengen für beliebige perfecte Mengen in gleicher Weise vorhanden sind, mögen sie continuirlich oder nirgends dicht sein, oder eine beliebige Combination dieser beiden Typen. Hierin liegt meines Erachtens einer der wichtigsten Erfolge der Mengenlehre. Damit ist zugleich erreicht, dafs für die Analysis eine jede perfecte Menge ein ebenso vollkommenes und geschlossenes Operationsgebiet darstellt, wie ein continuirlicher Bereich, und wie ich schon hier vorausschicke, ist es gerade dieser Gedanke, der sich in jüngster Zeit für die Analysis als fruchtbringend erwiesen hat.

Dritter Abschnitt.

Anwendungen auf Functionen reeller Variablen.

Man mag geneigt sein, dasjenige Gebiet aus der Lehre von den reellen Functionen, auf dem die Mengenlehre ihre vornehmsten Erfolge gezeitigt hat, als eine Art von Pathologie der Functionen zu betrachten. Sind es doch wesentlich Ausnahmeerscheinungen, die hier in Frage kommen, Erscheinungen, die bei den sogenannten „regulären" Functionen nicht anzutreffen sind. Aber die tiefere Einsicht in diese Dinge zeigt das Irrtümliche einer solchen Auffassung. Wie die Pathologie des Menschen ihre Gesetze hat, so ist auch für die singulären Eigenschaften der Functionen die Existenz einer sie beherrschenden Gesetzmäfsigkeit zu vermuten, und hier wie dort wird ihre wissenschaftliche Erfassung erst dann erreicht sein, wenn es gelingt, die Untersuchung positiv zu wenden, und von der singulären Einzelerscheinung zur Erkenntnis des Gesetzes zu gelangen, das sie regelt. Dieser Übergang hat sich gerade in den letzten Jahrzehnten stetig vollzogen. Nachdem die naiven Vorstellungen über den Functionsbegriff geschwunden waren, hat man sich zunächst

1) Es ist nämlich U Teilmenge der Complementärmenge.

längere Zeit damit begnügt, zur Wahrung des mathematischen Gewissens die Ausnahmeerscheinungen ausdrücklich auszuschliefsen und die Voraussetzungen so zu wählen, dafs sie allen Anforderungen der allgemein gehaltenen Beweise genügen. Aber dieser Standpunkt, der der Sache nach gegen die subtileren Ausnahmen ebenso ablehnend war, wie der naive, hat naturgemäfs einer mehr positiven Wendung Platz machen müssen. Wesentlich unter dem Einflufs und durch die Kraft der Riemann'schen Ideen hat sich allmählich die Erkenntnis Bahn gebrochen, dafs hier wie im Gebiet der complexen Functionen die regulären Fälle die Ausnahme und die Ausnahmeerscheinungen sozusagen die Regel bilden, dafs aber auch für sie Sätze allgemeinen Charakters existiren, auf denen sie beruhen[1]). Zur Ergründung dieser versteckteren Gesetzmäfsigkeit haben die mengentheoretischen Begriffe bereits mancherlei geleistet und berechtigen zu weiteren Hoffnungen. Wir dürfen insbesondere erwarten, dafs sich auch hier diejenige allgemeine Harmonie der Gesetze offenbaren wird, die das hervorragendste Kennzeichen und die grofse Anziehungskraft der mathematischen Erkenntnis bildet.

Um Functionen bestimmten Verhaltens zu bilden, kann man zwei wesentlich verschiedene Wege einschlagen. Man kann einen für den Zweck geeigneten analytischen Ausdruck bilden, man kann die Function aber auch so bestimmen, dafs man irgend welche Vorschriften giebt, die ihren Wert für jeden Wert der Variablen festlegen. Der hier skizzirte Gegensatz ist nicht allein stillschweigend, sondern auch polemisch zum Ausdruck gekommen. Ist die erste Art unbedingt als die vollkommenere zu betrachten, so hat uns doch auch die zweite Art wesentlich gefördert und ist an sich als eine der ersten gleichberechtigte Methode anzusehen. Insbesondere ist es die innere Structur der Functionen, für deren Erkenntnis sie sich von besonderer Zweckmäfsigkeit erwiesen hat. Auf beiden Gebieten hat die Mengenlehre reiche Früchte getragen. Für die analytische Darstellung der Functionen ist insbesondere diejenige Form des Princips der Verdichtung der Singularitäten zu nennen, die auf dem Abzählbarkeitsbegriff beruht, und was die Structurtheorien betrifft, so ist hier der Anteil der Mengenlehre an den neuen Resultaten noch erheblich gröfser. Sie hat es ermöglicht, die Structur der Functionen mit immer wachsender Vollkommenheit zu zergliedern, sowie auch umgekehrt Functionen bestimmter Structur durch gesetzmäfsige Vorschriften zu definiren resp. nachzuweisen[2]).

---

1) Man vgl. z. B. H. Hankel, Untersuchungen etc. S. 1 ff., resp. Math. Ann. 20, S. 63 und du Bois-Reymond im Journ. f. Math. 79, S. 21.

2) Was den oben erwähnten Gegensatz betrifft, so spielt hier natürlich auch die Frage hinein, in welchem Mafse man arithmetisirende Neigungen hat. Es würde zu weit führen, sachlich oder auch historisch auf diese Fragen einzugehen; nur bemerke ich, dafs der Standpunkt, wie ihn z. B.

Den Ausgangspunkt hierfür stellt der lange bekannte Satz dar, dafs eine stetige Function bestimmt ist, falls ihre Werte an einer überall dichten abzählbaren Menge gegeben sind. Zeigt dieser Satz zunächst theoretisch, dafs der Begriff der stetigen Function im Abzählbaren wurzelt, so gewährt er zugleich den grofsen praktischen Vorteil, dafs zur Bestimmung einer Function, die für eine Menge der Mächtigkeit c definirt ist, eine abzählbare Menge geeigneter Vorschriften hinreichend ist. Eine abzählbare Menge von Vorschriften läfst sich aber jederzeit wirklich aufstellen, und darin beruht es, dafs für die constructive Herstellung einer bestimmten Structur diese Methode der Functionsbestimmung besonders geeignet ist. Es kommt dazu, dafs der nämliche Thatbestand bis zu einem gewissen Grade auch bei punktweise unstetigen Functionen vorhanden ist.

Über den allgemeinen Charakter dessen, was die Mengentheorie für die Analysis leisten kann oder bisher geleistet hat, gestatte ich mir noch folgende Bemerkung. Ich erinnere zunächst an die Wandlung, die der seiner ganzen Natur nach mehr verschwommene als mathematische Begriff „im allgemeinen" im Lauf der letzten Jahrzehnte durchgemacht hat[1]). Zunächst nur auf eine endliche Zahl von Ausnahmepunkten bezogen, hat er mit der Zeit auch auf unendliche Mengen solcher Punkte ausgedehnt werden müssen. Ihm einen wirklichen Inhalt zu geben, und dies so, dafs dieser Inhalt die zureichende Erklärung der mathematischen Thatsachen liefert, ist ein Ziel, das die Theorie der Punktmengen im Gebiet der Analysis erreichen mufs. In diesem Sinn aufgefafst, wird die Theorie der Punktmengen zu einer Art molecularer Theorie der mathematischen Gesetze, die aber zur Erklärung dieser Gesetzmäfsigkeit einer besonderen Hypothese, wie in den Naturwissenschaften, nicht bedarf[2]).

Hiermit ist aber zunächst nur eine Forderung bezeichnet. Wenn es möglich war, ihr bereits mit einem gewissen Erfolg zu entsprechen, so liegt die Erklärung meines Erachtens in folgendem Umstand. Sicherlich bildet der Grenzbegriff und seine präcise

auch Borel in seinem Buch eingenommen hat, und der auf das Bestreben hinausläuft, die Untersuchung stets an literale oder algorithmische Darstellungen zu knüpfen, durch die Sache keineswegs als geboten erscheint. Der Inhalt eines jeden mathematischen Satzes mufs auch ohne Benutzung der Formeln und Symbole ausdrückbar sein; die Formeln und Symbole stellen also eventuell nur eine Erleichterung der Darstellung vor, sind aber nicht Selbstzweck. In Wirklichkeit ist auch die Zahl der durch analytische oder rechnerisch formale Vorschriften bestimmten Beispiele nur gering, wie sich andererseits unsere Einsicht gerade durch die anders gestalteten Beispiele wesentlich vermehrt hat. Ich erlaube mir noch den Hinweis, dafs die ganze Cantor'sche Theorie für diese Auffassung spricht.

1) Hier ist nur vom Gebiet der Analysis die Rede.

2) Das einzige hierzu nötige Postulat ist die oben S. 14 erwähnte Antithese, resp. der Grenzbegriff, und die Stetigkeitsdefinition.

Fassung die natürliche und notwendige Grundlage aller mathematischen Erkenntnis, die über die Betrachtung endlicher Processe hinausgeht, mag sie nun arithmetischer oder geometrischer Natur sein. Der Fortschritt der Methode besteht aber darin, geschlossene Begriffe zu schaffen[1]), die freilich aus dem Boden des Grenzbegriffes erwachsen müssen, die aber gestatten, in einfacherer Weise zu operiren, und es uns erlassen, in jedem einzelnen Fall immer von neuem in die auf dem ε und δ beruhende Analyse einzutreten. In dieser Hinsicht Abhilfe geschafft und Fortschritte gezeitigt zu haben, ist ein Verdienst, das die Theorie der Punktmengen für sich beanspruchen kann. Gerade für sie ist die Geschlossenheit ihrer Begriffe und Methoden charakteristisch. Diese Geschlossenheit hat nicht allein die Beweise vereinfacht und die Erkenntnisse präciser zu formuliren erlaubt, sie ist sogar im stande gewesen, Fälle aufzudecken, in denen die vorhandenen scheinbar strengen Vorstellungen irrig waren. Wenn wir diese Begriffe im grofsen und ganzen der schöpferischen Phantasie Georg Cantor's verdanken, so sind es doch wesentlich andere, die sich ihre Anwendung auf die Analysis zum Ziel setzen. In erster Linie habe ich A. Harnack zu nennen; ihm verdanken wir trotz erheblicherer Irrtümer mancherlei wertvolle Theoreme. In neuerer Zeit sind es hauptsächlich die französischen Mathematiker, die sich ihrer für die Zwecke der Analysis und Geometrie bedient und sie zur Grundlage der Begriffsbestimmungen gemacht haben. Ich nenne z. B. C. Jordan und E. Borel; was man mit ihnen erreichen kann, hat kürzlich auch R. Baire erkennen lassen. Die deutschen Vertreter der subtileren Analyse, wie z. B. Pringsheim und Stolz, haben sich zu diesem Schritt noch nicht recht entschliefsen können, was ich nicht allein methodisch, sondern auch sachlich für bedauerlich halte. Als Beleg hierfür mag und wird hoffentlich dieser Bericht sprechen. Ich habe mich bemüht, die Geschlossenheit der Begriffe und der Darstellung überall weiterzuführen, wo es mir möglich war; dafs hier nur Anfänge einer Entwickelung vorliegen, dürfte selbstverständlich sein. Ich habe überdies geglaubt, den Bericht möglichst vollständig halten zu sollen, und auch über solche Untersuchungen berichtet, in denen ein Vorzug der mengentheoretischen Behandlung vielleicht nicht vorhanden ist, oder auch die Problemstellung selbst von untergeordneter Natur erscheinen mag.

---

1) Als einen solchen Fortschritt betrachte ich z. B. auch die Einführung der Folge oder Fundamentalreihe.

Erstes Capitel.

Der Stetigkeitsbegriff.

Als Wertmenge der unabhängigen Variablen einer Function pflegte man ursprünglich gemäfs stillschweigender Übereinkunft einen continuirlichen Bereich zu betrachten. Die Idee, diese Wertmenge beliebig zu wählen, reicht jedoch ebenfalls schon ziemlich weit zurück. Sie mag an den allgemeinen Functionsbegriff Dirichlet's anknüpfen und ist allmählich eine selbstverständliche Vorstellungsweise geworden. Die Untersuchung der Frage, inwieweit sich die Begriffe und Sätze über Stetigkeit auf solche Functionen übertragen lassen, die für beliebige Punktmengen P definirt sind, ist jedoch erst neueren Datums (1). Da der Stetigkeitsbegriff der Definition gemäfs nur für solche Punkte in Frage kommen kann, die Grenzpunkte der bezüglichen Menge sind, so werden diejenigen Mengen P das wesentlichste Interesse beanspruchen, bei denen jeder ihrer Punkte ein Grenzpunkt ist, d. h. in sich dichte Mengen. Eine solche Menge ist dann entweder abgeschlossen und damit auch perfect oder nicht, und davon hängt in der That der Inhalt der Sätze ab, die hier eine Rolle spielen. Beide Arten von Mengen verhalten sich wesentlich verschieden.

C. Jordan ist wohl der erste gewesen, der diesen Dingen methodisch gerecht geworden ist. Er hat in seinem Traité bereits gezeigt[1]), dafs die Hauptsätze, die den Stetigkeitsbegriff betreffen, auf abgeschlossene resp. perfecte Mengen unmittelbar übertragbar sind (2, 3). Anders liegen die Dinge, falls die Mengen nicht abgeschlossen sind, wie dies ganz kürzlich von T. Brodén gezeigt worden ist; so verliert z. B. der Satz, dafs eine für jeden Punkt stetige Function gleichmäfsig stetig ist, für nicht abgeschlossene Mengen seine Geltung. Dies ist besonders für den Fall wichtig, dafs man eine stetige Function dadurch bestimmen will, dafs man ihre Werte an einer überall dichten Menge Q in geeigneter Weise vorschreibt (4).

Für alle allgemeinen, die Stetigkeit betreffenden Fragen bildet die von Peano und Hilbert angegebene Abbildung des Quadrats auf die Strecke ein lehrreiches Beispiel; ich schliefse deshalb eine genauere Analyse dieser Abbildung hier an (5). Ihr Charakter ist dahin zu beschreiben, dafs einer linearen continuirlichen Menge des Quadrats eine nirgends dichte Menge der Einheitsstrecke entspricht. Es ist zu vermuten, dafs dies bei allen stetigen Abbildungen einer Fläche auf eine Strecke der Fall ist (6).

1. Der moderne Stetigkeitsbegriff geht bekanntlich auf

1) Vgl. besonders Band 1, S. 46 ff. Diese Untersuchungen erschienen zuerst im Journ. de math. (4) Bd. 8, S. 72.

Cauchy zurück. Der Cauchy'schen Vorstellungsweise gemäfs heifst die Function $f(x, y, \cdots)$ der reellen Variablen $x, y, \cdots$ im Punkt $(x, y, \cdots)$ stetig, falls zu beliebig vorgegebenem ε eine Gröfse δ so bestimmt werden kann, dafs

$$| f(x+h, y+k, \cdots) - f(x, y, \cdots) | < \varepsilon$$

ausfällt, sobald $|h| < \delta$, $|k| < \delta$, $\cdots$ gewählt werden. Wird ε durch eine beliebige Reihe gegen Null abnehmender Gröfsen $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \cdots > \varepsilon_\nu > \cdots$ ersetzt, so leitet die Cauchy'sche Definition unmittelbar zu derjenigen über, die auf dem von Cantor für die Theorie der Irrationalzahl eingeführten Begriff der Fundamentalreihe oder Folge beruht. Bedienen wir uns, im Interesse der Kürze, der geometrischen Sprechweise, so lautet diese Definition wie folgt: Ist $p = (x, y, \cdots)$ irgend ein Punkt des Gebietes, für den die Function definirt ist, und ist p_ω Grenzstelle einer Punktmenge

$$p_1, p_2, p_3, \cdots = \{p_\nu\},$$

so heifst $f(x, y, \cdots) = f(p)$ an der Stelle p_ω stetig, falls die Functionswerte

$$F(p_1), F(p_2), F(p_3), \cdots = \{F(p_\nu)\}$$

eine Fundamentalreihe bilden, und der durch sie dargestellte Wert mit dem Functionswert $F(p_\omega)$ übereinstimmt, was man auch so schreiben kann, dafs

$$\lim F(p_i) = F(\lim (p_i))$$

ist. Diese heute durchaus geläufige Formulirung dürfte der Sache nach im wesentlichen auf Dirichlet'sche Ideen zurückgehen[1]); in ihrer expliciten Form erscheint sie wohl zuerst bei Heine[2]), und seiner Angabe nach unter dem Einflufs von G. Cantor.

Im vorstehenden ist über die Punktmenge $P = \{p\}$, die den Bereich der unabhängigen Variablen bildet, keinerlei Angabe enthalten. Die obigen Definitionen zeigen überdies, dafs der Stetigkeitsbegriff nur am Begriff des Grenzpunktes hängt, also mit einer abzählbaren Menge discreter Werte operirt. Daraus folgt, dafs er den Bereich der unabhängigen Variablen keineswegs als continuirlich voraussetzt; er kann vielmehr auf jede Punktmenge übertragen werden, die Grenzpunkte enthält.

2. Um dies durchzuführen, ist es zweckmäfsig, die Functionsbeziehung als Abbildung zweier Punktmengen aufzufassen. Ist $P = \{p\}$ eine beliebige Menge von Punkten $p = (x, y, \cdots)$ eines beliebigen Raumes, und ist $F(x, y, \cdots) = F(p)$ eine eindeutige oder

1) Dabei denke ich daran, dafs schon Dirichlet die Werte $F(p+0)$ und $F(p-0)$ mit $F(p)$ verglichen und für die Definition der Unstetigkeit benutzt hat.

2) Journ. f. Math. 74, S. 182.

mehrdeutige Function von x, y, $\cdots$, doch so, daſs zu jedem p nur eine endliche Zahl von Functionswerten gehört, so soll die Gesamtheit der Werte dieser Function als Punktmenge $Q = \{q\}$ bezeichnet werden, die Bild von P ist. Alsdann heiſst Q ein stetiges Bild von P, wenn zwischen den Mengen P und Q folgende Beziehung obwaltet. Sind p_1, p_2, p_3, $\cdots$ Punkte von P mit der Grenzstelle p_ω, und q_α, q_β, q_γ, $\cdots$ die sämtlichen ihnen entsprechenden Punkte von Q, so soll jede ihrer Grenzstellen q_ω dem Punkt p_ω als Bildpunkt entsprechen[1]), woraus noch beiläufig folgt, daſs die Zahl dieser Punkte p_ω endlich ist. Alsdann bestehen folgende Sätze[2]):

I. Das endlichdeutige und stetige Abbild Q einer abgeschlossenen Menge P ist selbst eine abgeschlossene Menge.

II. Das eindeutige und stetige Abbild Q einer perfecten Menge P ist wiederum eine perfecte Menge.

Ist nämlich q_ω Grenzpunkt einer in Q enthaltenen Punktmenge $\{q_\nu\} = q_1, q_2, q_3, \cdots$, so sind diese Punkte Bildpunkte gewisser Punkte p_α, p_β, p_γ, $\cdots$, die notwendig in unendlicher Menge vorhanden sind. Diese haben mindestens eine Grenzstelle p_ω, der alsdann q_ω entsprechen muſs. Damit ist der erste Satz bewiesen. Für den zweiten Satz ist weiter zu zeigen, daſs Q keine isolirten Punkte enthält. Wäre q ein solcher, und p ein Punkt, dessen Bild q ist, so ist p Grenzpunkt einer Menge $\{p_\nu\}$, der die Punkte $\{q_\nu\}$ entsprechen mögen. Diese Punkte haben alsdann mindestens eine Grenzstelle q_ω, die ebenfalls Bild von p ist, und da die Abbildung eindeutig ist, so ist q_ω mit q identisch, woraus noch nebenbei folgt, daſs es nur eine solche Grenzstelle q_ω giebt.

Der hier erörterte allgemeine Stetigkeitsbegriff besitzt auch die Eigenschaft, daſs, wenn f_1, f_2, $\cdots$ in dem genannten Sinn stetige Functionen der abgeschlossenen Menge $P = \{p\}$ sind, eine stetige Function $F(f_1, f_2, \cdots)$ auch wiederum stetige Function der Menge P ist, wie man leicht beweist. Alle diese Sätze gelten überdies unabhängig davon, ob die Menge P auch ein eindeutiges Bild von Q ist oder nicht; sie sind ferner durchaus unabhängig davon, in welchen räumlichen Gebieten die Mengen P resp. Q liegen, und die bezüglichen Variablen und Functionen ihre geometrische Darstellung finden. Es kann endlich auch die eine Menge continuirlich, die andere hingegen nirgends dicht sein, und es kann in dieser Hinsicht

1) Vgl. auch den Züricher Vortrag von Hurwitz, Verhandl. des ersten math. Congresses, Zürich, S. 102. Es ist naturgemäſs klar, daſs die obige für beliebige Mengen ausgesprochene Definition nur für solche Punkte einen Siun hat, die Grenzpunkte der Menge sind. Für andere Punkte der Menge kommt sie aber auch nicht in Betracht.

2) Diese Sätze finden sich für das lineare Gebiet zuerst bei K. Beckmann, Dissertation, Upsala 1888, S. 54.

jede an sich mögliche Combination bei P resp. Q vorliegen. Das einfachste Beispiel für diese Thatsache liefert die S. 79 angegebene Beziehung zwischen einer nirgends dichten linearen Menge $T = \{t\}$ und dem Continuum C der Einheitsstrecke, die auf der Zuordnung der überall dichten Menge $X = \{x_N\}$ zur Intervallmenge $D = \{\delta_N\}$ beruht. Ordnen wir den beiden Endpunkten t_l und t_r eines Intervalles δ_N den Punkt x_N von C zu, und jedem Punkt von T_{g}, der Grenzpunkt einer Folge von Intervallendpunkten ist, denjenigen Punkt von X_g, der Grenzpunkt der entsprechenden Folge ist, so ist dadurch x als eindeutige und stetige Function der Menge T resp. der Werte t definirt[1]), während t nur in den Punkten von X_g eindeutige und stetige Function von x, in den Punkten von X selbst dagegen zweideutig und damit unstetig ist. Andererseits liefert die bekannte Peano'sche Abbildung des Quadrats auf die Einheitsstrecke ein Beispiel, in dem die stetige Beziehung zwischen Quadrat und Strecke in der Weise hergestellt ist, dafs die Punkte der Einheitsstrecke eindeutig und stetig von den Punkten des Quadrats abhängen. Die unten folgende nähere Erörterung dieser Abbildung wird übrigens ergeben, dafs auch bei ihr continuirliche Mengen des Quadrats auf nirgends dichte Mengen der Einheitsstrecke abgebildet sind.

3. Wir wollen jetzt insbesondere annehmen, dafs die Beziehung zwischen den Mengen P und Q eineindeutig ist. Alsdann besteht der folgende wichtige und für die geometrischen Anwendungen grundlegende Satz:

III. Ist Q umkehrbar eindeutiges Bild der abgeschlossenen Menge P, und ist Q überdies stetiges Bild von P, so ist auch P stetiges Bild von Q[2]).

Für den Beweis dieses Satzes ist folgendes zu zeigen: Sind p' und q' zwei entsprechende Punkte, und ist q' Grenzpunkt einer Menge $\{q_\nu\} = q_1, q_2, q_3, \cdots$, so hat die entsprechende Menge $\{p_\nu\} = p_1, p_2, p_3, \cdots$ den Punkt p' als Grenzpunkt. Dies ist aber leicht zu sehen. Ist nämlich p_ω irgend eine Grenzstelle von $\{p_\nu\}$, und ist sie insbesondere Grenzstelle von Punkten $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma, \cdots$, so entsprechen ihnen die Punkte $q_\alpha, q_\beta, q_\gamma, \cdots$ mit der Grenzstelle q', und es mufs, weil Q stetiges Bild von P ist, q' Bild von p_ω sein. Daraus folgt aber, dafs $p_\omega = p'$ ist, und dafs also $\{p_\nu\}$ nur die eine Grenzstelle p' besitzt, womit der Satz bewiesen ist.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, dafs die Menge P und damit auch Q perfect ist. Für eine solche Menge gelten, auch wenn sie nirgends dicht ist, die nämlichen beiden Hauptsätze über

1) Dies gilt übrigens auch dann noch, wenn man alle Werte x, die links eines t_r, resp. rechts eines t_l liegen, um eine und dieselbe Constante vermehrt, resp. wenn man dies beliebig oft ausführt.

2) Vgl. C. Jordan, cours etc., Bd. I, S. 53. Auch dieser Satz findet sich in seinem einfachsten Fall schon bei Beckmann, a. a. O. S. 54.

ihre Stetigkeitseigenschaften wie für das Continuum, das ja selbst eine perfecte Menge darstellt. Die erste Eigenschaft ist die der gleichmäſsigen Stetigkeit, auf die im Fall einer linearen continuirlichen Menge zuerst Heine hingewiesen hat[1]), und die sich durch folgenden Satz ausdrückt:

IV. Eine für jeden Punkt einer perfecten Menge P stetige Function ist auch gleichmäſsig stetig.

Dem Stetigkeitsbegriff gemäſs giebt es nämlich um einen Punkt $p = (x, y, \cdots)$ eine Kugel H, so daſs für jeden ihrer inneren Punkte $p_i = (x + h, y + k, \cdots)$ die Differenz $| F(p_i) - F(p) |$ unterhalb der beliebigen Gröſse ε liegt[2]). Die Radien dieser Kugeln haben eine obere Grenze η, so daſs bei gegebenem ε zu jedem Punkt p eine solche Gröſse η gehört, und man kann zeigen, daſs die untere Grenze aller η, die zu den sämtlichen Punkten von P gehören, bei perfecten Mengen nicht Null ist. Wäre sie nämlich gleich Null, so fasse man irgend welche Punkte $p_1, p_2, p_3, \cdots p_\nu, \cdots$ so ins Auge, daſs die zugehörigen Gröſsen $\eta_1 > \eta_2 > \eta_3 > \cdots \eta_\nu > \cdots$ gegen Null convergiren. Ist dann p_ω ein Grenzpunkt der genannten Punkte, so gehört doch auch zu ihm ein endliches η, und dies steht damit in Widerspruch, daſs es in jeder Nähe von p_ω Punkte p_ν geben soll, deren η_ν unterhalb jeder Gröſse bleibt.

Der Schluſs beruht ganz wesentlich darauf, daſs der Punkt p_ω der Menge P angehört, was nur bei abgeschlossenen Mengen der Fall ist. Für nicht abgeschlossene Mengen versagt daher der vorstehende Beweis; in der That gilt auch der Satz nicht für sie[3]). Dieser Satz kann übrigens auch als eine unmittelbare Folge des S. 51 erwähnten Heine-Borel'schen Theorems betrachtet werden.

Der zweite der hier zu erwähnenden Sätze gilt für alle Arten von Mengen, also auch für alle in sich dichten Mengen. Er ist für den einfachen Fall einer Function einer continuirlichen Variablen zuerst von Heine aufgestellt worden[4]), ich spreche ihn folgendermaſsen aus:

V. Eine für eine beliebige Menge P stetige Function $F(x, y, \cdots)$ ist für alle Punkte von P bekannt, wenn sie für eine in Bezug auf P überall dichte[5]) Teilmenge U bekannt ist.

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Stetigkeitsdefinition, in Verbindung mit der Thatsache, daſs $P = U + U_g$ ist,

1) Journ. f. Math. 74, S. 188. Vgl. auch Lüroth, Math. Ann. 6, S. 319.

2) Dies gilt sowohl für perfecte, wie für in sich dichte Mengen, da bei beiden jeder Punkt Grenzpunkt ist.

3) Vgl. noch S. 132. Man vergleiche auch eine gelegentliche Bemerkung von L. Scheeffer, Acta math. 5, S. 295.

4) Journ. f. Math. 74, S. 183.

5) Vgl. S. 80.

also jeder Punkt von P als Grenzpunkt einer in U enthaltenen Punktmenge darstellbar ist.

4. Dieser Satz hat, wie bereits oben erwähnt wurde, zunächst eine hervorragend praktische Bedeutung. Wie aus ihm folgt, kann man nämlich eine in Bezug auf P stetige Function in der Weise bilden, dafs man ihre Werte an einer bezüglich P abzählbaren und überall dichten Teilmenge U geeignet vorschreibt, z. B. eine Function einer continuirlichen Variablen durch ihre Werte an den rationalen Stellen[1]). Dies geschieht bekanntlich so, dafs wenn

$$u_1, u_2, u_3, \cdots = \{u_\nu\}$$

irgend welche Punkte von u sind, die $u_\omega = p$ als Grenzstelle haben, der Functionswert $F(p)$ durch die Folge

$$F(u_1), F(u_2), F(u_3) \cdots = \{F(u_\nu)\}$$

zu definiren ist. Hier entsteht aber nun die Frage, wie die Werte von $F(u)$ beschaffen sein müssen, damit diese Function in der angegebenen Weise in eine für die Menge P stetige Function übergeht, so dafs also die Reihen $\{F(u_\nu)\}$ stets einen Grenzwert besitzen, und zwar unabhängig von der Fundamentalreihe $\{u_\nu\}$, durch die p dargestellt wird. Hierzu ist jedenfalls notwendig, dafs $F(u)$ für jeden Punkt der Menge U die Stetigkeitseigenschaft besitzt, doch ist diese Bedingung keineswegs hinreichend. Denn da jetzt U eine in sich dichte und nicht perfecte Menge ist, so kann man nicht mehr schliefsen, dafs die oben betrachtete untere Grenze von η gröfser als Null ist, da jetzt der bezügliche Punkt p_ω der Menge U nicht immer angehört. Dies ist nur der Fall, falls man die nicht erweisbare gleichmäfsige Stetigkeit für $F(u)$ ausdrücklich fordert oder voraussetzt. Auf diese Thatsache hat kürzlich Brodén[2]) aufmerksam gemacht. Ihre weitere Bedeutung wird sich weiter unten ergeben; hier genüge es, das Resultat wie folgt auszusprechen:

VI. Ist U eine überall dichte Teilmenge einer perfecten Menge P, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs eine bezüglich U stetige Function $F(u)$ zu einer für P stetigen Function $F(p)$ erweitert werden kann, darin, dafs $F(u)$ bezüglich U gleichmäfsig stetig ist[3]).

---

1) Es folgt hieraus ein neuer Beweis dafür, dafs die Mächtigkeit aller stetigen Function gleich $\mathfrak{c}$ ist; denn ihre Gesamtheit ist eine Teilmenge der Belegungsmenge von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{c}$, d. h. $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$.

2) Journ. f. Math. 118, S. 3 und Acta Univ. Lund. Bd. 8, S. 10.

3) Brodén bezeichnet a. a. O. eine für eine überall dichte, abzählbare Menge U stetige Function als quasistetig und nennt jede Function $F(p)$, die aus $F(u)$ durch obengenannten Erweiterungsprocess entsteht, eine limitäre Function. Er bezeichnet überdies die Punkte von U als primäre, die von U_g als secundäre Stellen.



Man kann den vorstehenden Satz unter anderem auch benutzen, um eine stetige Function zu bilden, die an jeder rationalen Stelle einen rationalen Wert hat, ohne doch längs irgend eines Intervalls selbst eine rationale Function zu sein, und dies sogar so, dafs die Function monoton ist[1]). Die Möglichkeit der eineindeutigen und ähnlichen Abbildung der der Gröfse nach geordneten rationalen Zahlen auf sich selbst findet sich übrigens auch bei Cantor erwähnt[2]), ohne dafs jedoch die Stetigkeit in Betracht gezogen wird. Es ist leicht, dies so zu thun, dafs auch die Stetigkeit gewahrt wird.

Ich werde in der Folge sagen, dafs $F(p)$ aus $F(u)$ durch einen Erweiterungsprocefs hervorgeht, auch $F(p)$ die auf die Menge P erweiterte Function nennen[3]).

Ich führe noch folgende Bezeichnung ein. Ist eine für eine Menge P definirte Function gegeben, und Q eine Teilmenge von P, so kann gelegentlich die Function nur für die Werte in Frage kommen, die sie an der Menge $Q = \{q\}$ hat. Alsdann wollen wir die so aufgefafste Function durch

$$F(q) = F(p, Q)$$

bezeichnen. Demgemäfs würde die eben benutzte Function $F(u)$ auch als $F(p, U)$ zu bezeichnen sein, wenn man von $F(p)$ ausgeht.

5. Es ist hier der Ort, wo sich die Erörterung der Peano'schen Abbildung am natürlichsten einfügt. Sei C_2 die Punktmenge des Quadrats, und C_1 die Punktmenge auf der Einheitsstrecke. Gemäfs dem vorstehenden wird eine stetige Abbildung von C_2 auf C_1 sicher vorhanden sein, wenn es gelingt, diese Abbildung für eine abzählbare und überall dichte Punktmenge des Quadrates C_2 gleichmäfsig stetig herzustellen. Als solche Mengen bieten sich zunächst die rationalen Punkte dar; die einfachste Art der Abbildung erhält man jedoch, falls man solche Teilmengen der rationalen Punkte ins Auge fafst, die bei fortgesetzter Teilung der Einheitsstrecke und des Quadrates entstehen. Es handelt sich nur darum, wie man eine stetige Beziehung zwischen diesen Mengen vermittelt, und dies geschieht folgendermafsen[4]).

---

1) Vgl. hierüber auch Cap. 2 dieses Abschnitts, S. 137: Eine Function einer Variablen soll monoton im Intervall $a \ldots b$ heifsen, wenn sie in ihm entweder niemals zunimmt oder niemals abnimmt. Ich bemerke ferner ganz allgemein, dafs ich die Angabe, ob einem Intervall seine Endpunkte zuzurechnen sind oder nicht, meist unterlassen werde. Ob dies zu geschehen hat oder nicht, ist von sich aus klar. Ist die Menge P, die die Wertmenge von x bildet, abgeschlossen, so gehören die Endpunkte dem Intervall an; ist sie nicht abgeschlossen, so ist es belanglos, ob sie ihm zugerechnet werden oder nicht. Ähnlich ist es im Gebiet mehrerer Variablen.

2) Math. Ann. 46, S. 504.

3) Vgl. auch S. 132 ff.

4) Die hier folgende Darstellung gab der Verf. bereits 1898 in Düsseldorf. Sie ist kürzlich auch von anderer Seite veröffentlicht worden vgl. Moore, Trans. of the Am. Math. Soc. 1, 1, S. 77.

Sei μ eine beliebige **ungerade** Zahl, so teile man die Einheitsstrecke in $\mu^2 = \varrho$ der Einfachheit halber gleiche Teile, die der Reihe nach

$$e_1, e_2, e_3, \cdots e_\varrho$$

sein mögen. Ebenso teile man die Quadratseiten in je μ gleiche Teile, so lassen sich die $\mu^2 = \varrho$ Teilquadrate q_i in einem einzigen Linienzug L_1 so durchlaufen, dafs (Fig. 2) jedes q_i eine Diagonale d_i zu L_1 beiträgt. Durch diesen Linienzug werden die Quadrate q_i in eine Reihenfolge

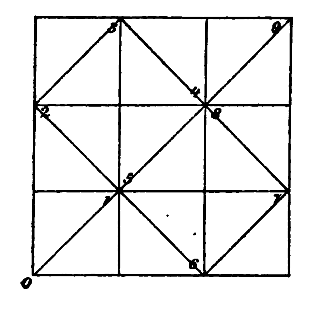


Fig. 2.

$$q_1, q_2, q_3, \cdots q_\varrho$$

gebracht; wir ordnen sie den obigen Intervallen so zu, dafs e_i und q_i einander entsprechen, und zugleich den Endpunkten x_{i-1} und x_i von e_i die Endpunkte p_{i-1} und p_i der Diagonale d_i. Wir haben dann bereits zwei endliche Mengen

$$X_1 = \{x_i\} \text{ und } P_1 = \{p_i\},$$

so dafs X_1 eindeutiges Bild von P_1 ist, aber P_1 nicht eindeutiges Bild von X_1.

Man teile nun jedes Intervall e_i wieder in ϱ gleiche Teile

$$e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}, \cdots e_{i\varrho},$$

und analog jedes Quadrat q_i in ϱ gleiche Teilquadrate

$$q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}, \cdots q_{i\varrho},$$

so lassen sich auch diese Quadrate durch einen Linienzug $L^{(i)}$ durchlaufen, der dem Linienzug L_1 analog ist und für die Quadrate q_{ik} die vorstehende Anordnung bestimmt. Es fällt dabei der Anfangspunkt und Endpunkt von $L^{(i)}$ mit dem Anfangspunkt und Endpunkt der Diagonale d_i zusammen, die q_i zum Linienzug L_1 beiträgt, und dies bewirkt, dafs alle diese Linienzüge $L^{(i)}$ einen einheitlichen Linienzug L_2 bilden, der die Quadrate q_{ik} in derselben Reihenfolge durchläuft, die die Intervalle e_{ik} auf der Einheitsstrecke haben.

In dieser Weise kann man fortfahren. Man erhält so die Linienzüge

$$L_1, L_2, L_3, \cdots L_\nu, \cdots,$$

und jeder Linienzug L_ν liefert zwei endliche Mengen

$$X_\nu = \{x_{ikl\ldots}\} \text{ und } P_\nu = \{p_{ikl\ldots}\},$$

die das Quadrat allmählich überall dicht bedecken und zwei überall dichte Mengen[1])

$$X = \{x_N\} \text{ und } P = \{p_N\}$$

liefern von der Art, daſs X ein eindeutiges und stetiges Abbild von P ist, wohingegen P nicht eindeutiges Bild von X ist. Diese Abbildung läſst sich nun wieder zu einer für alle Punkte von C_2 resp. C_1 giltigen erweitern. Ist nämlich x_g ein beliebiger Punkt von X_g, so ist er Grenzpunkt einer Intervallreihe

$$e_i, e_{ik}, e_{ikl}, \cdots e_N, \cdots$$

für bestimmte $i, k, l, \cdots$, und ihm entspricht derjenige Punkt p von P_g, der durch die Folge von Quadraten

$$q_i, q_{ik}, q_{ikl}, \cdots q_N, \cdots$$

dargestellt wird. Da nun nach der Construction P ein gleichmäſsig stetiges Bild von X ist, so ist auch C_2 stetiges Bild von C_1; also folgt:

VII. Man kann eine abzählbare überall dichte Punktmenge eines Quadrats eindeutig und gleichmäſsig stetig auf eine abzählbare überall dichte Punktmenge einer Strecke abbilden; durch Erweiterung dieser Abbildung wird alsdann auch die Gesamtheit aller Punkte des Quadrats eindeutig und stetig auf die Gesamtheit der Punkte der Strecke abgebildet.

Das umgekehrte ist natürlich nicht der Fall, da C_1 nicht eindeutiges Bild von C_2 ist. Es entsprechen vielmehr jedem Punkt des Quadrats, der zu einer Menge P_ν gehört, zwei Punkte der Strecke, nämlich je zwei Punkte der Menge X_ν, ferner jedem Punkt des Quadrats, der auf einer der benutzten Teilungslinien liegt, ohne einer Menge P_ν anzugehören, vier Punkte der Strecke, jedem andern Punkt des Quadrats hingegen nur ein Punkt der Strecke.

Übrigens kann man diese Abbildung noch mannigfach modificiren, insbesondere so, daſs man die Teilung des Quadrates so vornimmt, daſs man es erst in μ Rechtecke zerlegt, die nicht gleich zu sein brauchen, und dann jedes Rechteck wieder irgendwie in μ weitere rechteckige Teile, oder auch so, daſs man die feste Zahl μ durch beliebige ungerade Zahlen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots$ ersetzt, die sogar auch beliebig wachsen mögen, u. s. w.; nur muſs dabei naturgemäſs die Bedingung der gleichmäſsigen Stetigkeit erfüllt bleiben. Die Peano'sche Abbildung entspricht dem einfachsten Fall des obigen Verfahrens, daſs nämlich $\mu = 3$ ist[2]).

Über die Besonderheit dieser Art stetiger Abbildungen bemerke

1) Für die Bezeichnung vgl. S. 77.

2) Dies läuft darauf hinaus, alle Punkte in einem Zahlsystem mit der Basis 3 darzustellen. Von dieser Darstellung geht Peano aus und giebt die an sie anschlieſsenden arithmetischen Abbildungsgesetze.

ich noch folgendes. Aus dem Charakter der Abbildung folgt, dafs jedem beliebigen Stück der Einheitsstrecke eine solche Teilmenge des Einheitsquadrats q entspricht, der gewisse Teilquadrate q_N mit allen ihren Punkten angehören. Einer in q gezogenen Geraden oder beliebigen Curve entspricht daher notwendig eine nirgends dichte Menge der Einheitsstrecke, und aus dem Satz I folgt, dafs diese Menge abgeschlossen ist. Dagegen braucht einer perfecten Menge des Quadrats keine perfecte Bildmenge auf der Einheitsstrecke zu entsprechen, da Satz II die eindeutige Abbildung voraussetzt[1]. Also folgt:

VIII. Bei der obigen Abbildung des Quadrats auf die Strecke entspricht jeder das Quadrat durchziehenden Geraden eine nirgends dichte abgeschlossene Menge der Einheitsstrecke, die jedoch nicht perfect zu sein braucht[2].

Denkt man sich alle Geraden g, die einer und derselben Richtung parallel sind, so entspricht jeder von ihnen eine nirgends dichte Menge G der Einheitsstrecke, und die Gesamtheit dieser Mengen G liefert das auf der Einheitsstrecke liegende Continuum C_1[3].

Der vorstehende Satz gilt übrigens auch für die von Hilbert[4] angegebene Abbildung des Quadrats auf die Strecke. Was die Stellung dieser beiden Abbildungsweisen zu einander betrifft, so kommen in ihnen die zwei wesentlichen Methoden zur Anwendung, mittelst deren man eine „Curve" durch Polygonzüge von wachsender Seitenzahl zu approximiren pflegt. Dies kann erstens so geschehen, dafs man auf der Curve eine endliche Punktmenge P_ν auswählt, die zu Ecken der Polygonzüge benutzt wird, und die mit wachsendem ν die Curve überall dicht bedeckt, und dies ist bei der Peano'schen Abbildung realisirt. Hierin liegt zugleich der geometrische Inhalt des oben abgeleiteten allgemeinen Satzes. Man kann aber auch die Punktmenge P_ν in anderer Weise wählen, und zwar ist der extremste Fall der, dafs man keinen Punkt von P_ν auf der Curve annimmt, so dafs, falls die Curve geschlossen ist, die approximirenden Polygone ganz innerhalb von einander liegen; und dies ist bei der Hilbert'schen Abbildung der Fall[5].

---

1) Es ist leicht, Beispiele anzugeben, in denen dies der Fall ist. Man wähle z. B. die Strecke 01 bei der unten erwähnten Hilbert'schen Abbildung, resp. ihre Bildmenge.

2) Wählt man z. B. als Gerade die Diagonale 01 des Quadrats, so bleiben bei der Peano'schen Abbildung auf der Einheitsstrecke die Intervalle 14 und 58 von Bildpunkten frei, ebenso alsdann je zwei analoge Intervalle auf den Strecken 01, 45, 89 u. s. w.

3) Eine analoge Composition des Continuums C_1 aus nirgends dichten Mengen, die bei der Abbildung des Quadrats auf die Gerade auftritt, zeigte der Verfasser in Gött. Nachr. 1896, S. 255.

4) Math. Ann. 38, S. 459.

5) Vgl. z. B. die a. a. O. befindlichen Figuren. Eine Abbildung des Quadrats auf die Strecke, die in einer überall dichten Menge der Mächtigkeit c stetig ist, giebt auch Cesaro; vgl. Bull. des Scienc. math. (2) 21, S. 257.

Das obige Verfahren der stetigen Abbildung läfst sich auf den Würfel des C_3, sowie auf einen Würfel des C_ν ausdehnen. Teilt man den gewöhnlichen Würfel w in $\mu^3 = \varrho$ Teilwürfel w_i, wo μ wieder eine ungerade Zahl ist, so kann man zunächst jeden der μ^2 Würfel der über einer Seitenfläche q stehenden Schicht in der Reihenfolge durchlaufen, wie vorstehend die μ^2 Quadrate q_i. Der sie durchziehende Linienzug L' ist überdies so zu wählen, dafs er von jedem dieser Teilwürfel eine Körperdiagonale enthält, so dafs er abwechselnd einen Punkt der Fläche q und der zu ihr parallelen Fläche q' enthält, und dafs zugleich seine Projection auf q den oben benutzten Linienzug L_1 liefert. Wenn alsdann der Linienzug L' in der Fläche q beginnt, so endigt er in q', und man kann nun die zweite Schicht in derselben Weise durchziehen u. s. w. Man kann dann wieder jede Diagonale dieses Linienzuges durch einen analogen Linienzug ersetzen und gelangt so zu den gleichen Resultaten, wie vorher[1]).

6. Man kann umgekehrt die Frage stellen, ob Satz VIII für jede eindeutige und stetige Abbildung des Quadrats auf die Strecke erfüllt ist, die nicht für alle Punkte des Quadrats umkehrbar eindeutig ist. Diese Frage dürfte zu bejahen sein, wenn man überdies voraussetzt, dafs jedem Punkt des Quadrats nur eine endliche Zahl von Punkten der Strecke entspricht. Man kann zunächst folgern, dafs die Punkte, in denen die Abbildung nicht umkehrbar eindeutig ist, eine überall dichte Menge $P = \{p\}$ bilden müssen. Wäre nämlich H ein Gebietsteil des Quadrats, in dem kein derartiger Punkt p vorhanden wäre, so läge für den Gebietsteil H eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung vor, und das Bild von H ist dann notwendig ein Flächenstück[2]). Betrachtet man jetzt wieder eine das Quadrat durchziehende Gerade und denkt sich ihre Punkte durch einen Parameter t dargestellt, so ist die Abscisse x des auf der Einheitsstrecke liegenden Bildpunktes eine Function, die in jedem Punkt p, der auf der Geraden liegt, mehrwertig ist. Hieraus ist der Satz zu folgern, ich mufs es aber dahingestellt lassen, ob dies ohne weitere Annahmen möglich ist. Eine allgemeine Aufzählung aller überhaupt möglichen stetigen Abbildungen des Quadrats auf die Strecke vermag ich in zwingender Form hier nicht anzugeben.

Zweites Capitel.

Die punktweise unstetigen Functionen.

Hankel ist der erste gewesen, der eine systematische Untersuchung der punktweise unstetigen Functionen angestellt hat; von ihm stammt auch bereits die Einteilung aller Functionen in überall

1) Dafs die Abbildung auf den Würfel übertragbar ist, findet sich schon bei Peano, Math. Ann. 36, S. 59.

2) Vgl. eine Note des Verf. in den Götting. Nachr. 1900, Heft 1.

stetige, punktweise unstetige und überall unstetige Functionen. Den Anstofs zu dieser Untersuchung hatte bekanntlich Riemann gegeben, indem er ein erstes Beispiel einer Function kennen lehrte, die unendlich viele und sogar überall dicht liegende Unstetigkeitspunkte enthält. Die genauere Analyse dieser Functionen erfordert die Einführung des einer jeden Stelle zukommenden Unstetigkeitsgrades (Sprunges) ω einer Function (1). Aufser Hankel sind auch Volterra und Harnack als diejenigen zu nennen, denen man die ersten allgemeineren Sätze auf diesem Gebiete verdankt.

Wie der Heine-Borel'sche Satz bei überall stetigen Functionen die Quelle der gleichmäfsigen Stetigkeit ist, so ist es auch hier ein Gedanke Borel's, der die einfachste und durchsichtigste Grundlage der Schlüsse bildet (2). Es ist dasjenige Theorem, das bereits (S. 109) als das Gegenstück des eben genannten Satzes bezeichnet wurde, und mittelst dessen wir die Mengen zweiter Kategorie construirt haben. Eine solche Menge wird von den Stetigkeitspunkten einer jeden punktweise unstetigen Function gebildet. Die immer abgeschlossenen Mengen K_ν, die aus den Unstetigkeitspunkten $\omega \geqq k_\nu$ bestehen, stellen in ihrer Gesamtheit diejenige Menge erster Kategorie $\mathfrak{M}\{K_\nu\}$ dar, deren Complementärmenge die Stetigkeitspunkte liefert (3). Die besondere Art der Mengen K_ν, sowie die aus ihnen gebildete Gesamtmenge $\{K_\nu\}$ bilden daher die natürliche Grundlage für die Einteilung der punktweise unstetigen Functionen. Die bekannteren Beispiele sind meist solche, in denen jedes K endlich ist, während $\{K_\nu\}$ überall dicht ist. Man kennt aber auch Functionen, bei denen die Mengen K unendlich sind oder sogar die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen (7, 3).

Neuere Untersuchungen Brodén's gehen darauf aus, die Erörterung der punktweise unstetigen Functionen $F(p)$ an die Werte zu knüpfen, die sie an den Stetigkeitspunkten haben. Die methodische Weiterbildung dieses Gedankens führt dazu, die Function in zwei Bestandteile zu spalten, von denen der eine eine Function ist, die an allen Stetigkeitspunkten den Wert Null hat und als eine Art äufserlicher Zuthat betrachtet werden kann (5). Diese Spaltung wird sich für manche Zwecke als von erheblichem Nutzen erweisen, insbesondere da, wo, wie beim Integralbegriff, die Werte der Function an den Unstetigkeitsstellen in gewissem Sinn belanglos sind.

Sätze besonderen Inhalts waren bis vor kurzem nur für Functionen einer Variablen bekannt. Baire hat kürzlich solche Sätze auch für Functionen mehrerer Variablen aufgestellt, er hat insbesondere untersucht, wie man bei einer Function von zwei Variablen aus der Stetigkeit bezüglich jeder einzelnen Variablen auf die Gesamtstetigkeit schliefsen kann (9). Er hat auch die allgemeine Analyse der punktweise unstetigen Functionen durch neuere Untersuchungen wesentlich vertieft (10).

Die vorstehenden Resultate beziehen sich übrigens nicht allein

auf Functionen eines continuirlichen Gebiets. Die Punktmenge, für die sie definirt sind, kann vielmehr auch nirgends dicht sein.

1. Ist $F(x, y, \cdots) = F(p)$ eine für die unendliche Menge P definirte Function, und ist

$$(1) \qquad \{p_\nu\} = p_1, p_2, p_3, \cdots p_\nu, \cdots$$

eine Punktfolge, die gegen p_ω convergirt, so heifst die Function an der Stelle p_ω unstetig, falls die Reihe

$$(2) \qquad \{F(p_\nu)\} = F(p_1), F(p_2), \cdots F(p_\nu), \cdots$$

für irgend eine den Punkt p_ω darstellende Folge der Form (1) nicht gegen den Functionswert $F(p_\omega)$ convergirt. Um hierfür eine präcisere Begriffsbestimmung zu erhalten, führt man den Begriff der Schwankung und des Unstetigkeitsgrades ein. Ist nämlich H_ν irgend eine um p gelegte Kugel mit dem Radius ϱ_ν, so wird bekanntlich die Differenz zwischen der oberen und unteren Grenze aller Functionswerte, die $F(p)$ innerhalb der Kugel H_ν annimmt, als Schwankung σ_ν bezeichnet. Wenn nun ϱ_ν gegen Null convergirt, so convergirt σ_ν gegen eine bestimmte untere Grenze k, und es ist $F(p)$ nach dem vorigen an der Stelle p stetig, falls $k = 0$ ist. Ist jedoch $k > 0$, so heifst $F(p)$ an der Stelle p unstetig, und es soll k als der Unstetigkeitsgrad ω an der Stelle p bezeichnet werden[1]. Es wird auf diese Weise jeder Stelle p eine bestimmte Zahl $\omega(p) = k$ zugeordnet. Diese Zahl k ist davon unabhängig, ob der Kugel H_ν die Punkte der Oberfläche zugerechnet werden oder nicht; ist ferner $k' > k$, so giebt es stets eine Kugel H, für die $\sigma \leqq k'$ ist, während für $k' < k$ solche Kugeln nicht existiren.

2. Sei nun insbesondere die Menge P, für die die Function $F(p)$ definirt ist, eine abgeschlossene Menge. Alsdann giebt es einen einfachen Satz allgemeiner Art über die Unstetigkeitspunkte. Aus der Natur des Grenzpunktes und der Definition des Unstetigkeitsgrades folgt unmittelbar, dafs die Punkte vom Unstetigkeitsgrad $\omega \geqq k$, falls sie in unendlicher Zahl vorhanden sind, eine abgeschlossene Menge K bilden. Dieser Satz beherrscht die Verteilung der Unstetigkeitspunkte vollständig.

Sei jetzt die Menge P insbesondere eine perfecte Menge T, die in einem Gebietsteil H enthalten ist, so dafs also jeder Punkt ein Grenzpunkt ist und auf jeden von ihnen der Stetigkeitsbegriff anwendbar ist. Es sind dann an sich drei Fälle möglich. Es können erstens alle Punkte von T Stetigkeitspunkte sein, oder sie sind sämtlich Unstetigkeitspunkte, oder aber sie sind teils Stetigkeits-

---

[1] Eine andere, auf Wahrscheinlichkeitsbegriffen ruhende Definition des Unstetigkeitsgrades giebt Cesaro. (Rend. dell' Acc. dei Linc. (4) 4, S. 12.)



punkte, teils Unstetigkeitspunkte. Im ersten Fall ist die Function in T überall stetig, im zweiten heifst sie überall oder total unstetig. Was den dritten Fall betrifft, so ist weiter zu unterscheiden, ob es Teilbereiche von H giebt, in denen die Function total unstetig bezüglich T ist oder nicht. Giebt es keinen Teilbereich dieser Art, und dieser Fall ist der einzige, der der näheren Erörterung bedarf, und auf den wir uns daher ausdrücklich beschränken[1]), so heifst dies andererseits, dafs die Stetigkeitspunkte einer solchen Function überall dicht bezüglich T liegen. Diese Functionen sollen als punktweise unstetige Functionen in T bezeichnet werden.[2]) Mit Rücksicht auf S. 63 u. 80 schliefsen wir nun weiter, dafs die Menge der Unstetigkeitspunkte $\omega > k$ nirgends überall dicht bezüglich T sein kann; d. h. es folgt:

I. Ist $F(x, y, \ldots)$ eine für die perfecte Punktmenge T punktweise unstetige Function, so bilden die Punkte $\omega \geqq k$ für jedes k eine bezüglich T nirgends dichte abgeschlossene Menge K.[3])

Die Menge K ist nichts anderes als eine Borel'sche Menge (S. 110). Wird nämlich zu einem Punkt von T der gröfste Bereich η gesucht, innerhalb dessen die Functionsschwankung $\sigma \leqq k$ ist, so gehört jetzt nicht zu jedem Punkt ein solcher Bereich, es bilden aber diese Bereiche in ihrer Gesamtheit eine Borel'sche Gebietsmenge, und K ist die zugehörige abgeschlossene Menge. In diesem

1) Der Bereich H, in dem eine Function definirt ist, mufs immer in eine höchstens abzählbare Menge von Teilbereichen H_1, H_2, H_3, ... zerfallen, so dafs in jedem Bereich H_i die Function einen der drei oben genannten Charaktere besitzt.

2) Die Bezeichnung stammt im wesentlichen von Hankel, wenn auch seine Einteilung sich mit der obigen nicht ganz deckt, Math. Ann. 20, S. 85. Eine davon verschiedene, jedoch nicht allgemein acceptirte Bezeichnung findet sich bei Harnack, die Elemente etc., S. 262.

3) Da der Begriff der punktweise unstetigen Function sich meist an eine continuirliche unabhängige Variable knüpft, so scheint es angemessen, ein Beispiel zu geben, das sich auf den Fall einer Menge T bezieht. Dazu betrachte man zunächst eine Function $F(x)$, die für alle Punkte eines Intervalls $a \ldots b$ definirt ist und in allen Punkten von T den Wert 1 hat, sonst aber Null ist, so ist diese Function in Bezug auf T constant, also auch stetig. Würde man die Function $F(x)$ so abändern, dafs sie nur an den Stellen von T_l und T_r (S. 77) den Wert 1 hat, sonst aber Null ist, so ist sie eine in T total unstetige Function. Nimmt man $F(x)$ als punktweise unstetige Function im Intervall $a \ldots b$ an, bildet das auf $a \ldots b$ liegende Continuum C in der oben (S. 79) angegebenen Weise auf die Menge T ab und ordnet jedem Punkt t der Menge T denjenigen Functionswert zu, der dem Bildpunkt x in C entspricht, so ergiebt sich eine in T punktweise unstetige Function. Die Function behält diese Charaktere sogar auch, wenn man an allen links von einem Punkte t_r oder rechts von einem Punkte t_l liegenden Stellen die Functionswerte um eine beliebige Constante vermehrt.

Thatbestand und seinem Gegensatz zum Heine-Borel'schen Theorem findet der Unterschied zwischen stetigen und punktweise unstetigen Functionen seinen einfachsten Ausdruck[1]).

3. Die Existenz einer Menge K für jedes k bildet danach die notwendige Bedingung dafür, daſs die Function nur punktweise unstetig ist; naturgemäſs kann die Menge K auch aus einer endlichen Anzahl von Punkten bestehen. Diese Bedingung ist nun aber auch umkehrbar; d. h. es besteht der Satz:

II. Bilden für eine perfecte Menge T die Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq k$ einer Function für jedes k eine nirgends dichte abgeschlossene Menge K, so ist die Function für die Menge T punktweise unstetig.

Sei nämlich

$$k_1 > k_2 > k_3 > \cdots > k_\nu > \cdots$$

eine Reihe positiver gegen Null abnehmender Gröſsen, so entspricht jedem k_i eine nirgends dichte Menge K_i von Punkten $\omega \geqq k_i$. Wir erhalten so die Mengen

$$K_1, K_2, K_3, \cdots K_\nu, \cdots,$$

deren jede in der folgenden als Teilmenge enthalten ist, und die mit wachsendem Index die Unstetigkeitspunkte des Bereichs mehr und mehr absorbiren. Es kann dabei vorkommen, daſs die Punkte von K_ν mit wachsendem ν in jeden Teilbereich eindringen und zuletzt überall dicht in T liegen, doch braucht dies keineswegs der Fall zu sein. Jedenfalls liegen aber die Stetigkeitspunkte noch überall dicht in T. Die Mengen K_ν bilden nämlich, wie unmittelbar ersichtlich ist, eine Menge erster Kategorie, deren Complementärmenge die Stetigkeitspunkte darstellt. In der That ist jeder Unstetigkeitspunkt notwendig Punkt einer Menge K_ν, also ist jeder Punkt der Complementärmenge ein Stetigkeitspunkt. Damit ist der obige Satz bewiesen.

Die Eigenschaft der punktweise unstetigen Functionen, daſs ihre Stetigkeitspunkte überall dicht liegen, läſst sich noch genauer formuliren; wie aus dem obigen folgt, besteht nämlich folgender darüber hinausgehender Satz:

III. Die Stetigkeitspunkte einer punktweise unstetigen Function besitzen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ und bilden eine Menge zweiter Kategorie.

---

1) Du Bois-Reymond, der für diese Dinge eine feine Empfindung hatte, wenn er auch nicht immer zu bleibenden Begriffen gelangte, bezeichnet diesen Gegensatz so, daſs er Streckenstetigkeit und Punktstetigkeit unterscheidet und allgemein der Streckenbedingung, die für jeden Punkt gelten soll, die Punktbedingung gegenüberstellt. Vgl. z. B. Journ. f. Math. 100, S. 338 und C. R. 92, S. 962. Er sagt ferner, daſs bei Annäherung an einen Unstetigkeitspunkt der Stetigkeitsgrad unter jede Grenze sinkt.

Aus der Thatsache, dafs jede Menge K nirgends dicht ist, folgert man noch leicht, dafs auch die Summe und das Product beliebig (aber endlich) vieler punktweise stetigen Functionen niemals total unstetig sein kann. Hieraus folgt unmittelbar ein Satz von Volterra, der hier noch eine Stelle finden mag, und der besagt, dafs es zu einer im Bereich H punktweise unstetigen Function $F(p)$ keine punktweise unstetige Function giebt, die stetig ist, wo $F(p)$ unstetig ist, und umgekehrt[1]).

4. Ein Unstetigkeitspunkt x einer Function einer Variablen heifst bekanntlich links resp. rechts von der ersten oder zweiten Art, je nachdem ein bestimmter Grenzwert $f(x-0)$ resp. $f(x+0)$ vorhanden ist oder nicht. In Verallgemeinerung hiervon kann man nach der Menge Q aller Werte $\{q\}$ fragen, die sich an einer Unstetigkeitsstelle p einer Function $F(p)$ als analog definirte Functionswerte einstellen können[2]). Hieraus ist zu antworten, dafs diese Menge sowohl endlich, wie auch unendlich, sowohl abzählbar, als auch von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ sein kann. Es bestehen nämlich in dieser Hinsicht folgende Sätze:

IV. Die Menge $Q=\{q\}$ ist eine abgeschlossene Menge.

V. Jede abgeschlossene Menge $Q=\{q\}$ kann Wertmenge einer punktweise unstetigen Function an einem Unstetigkeitspunkt sein.

Nur der zweite Satz bedarf einer Erläuterung. Um ihn zu erweisen, genügt es, wenn wir eine Function einer Variablen construiren, die punktweise unstetig ist und an einer Seite des Punktes x' alle Werte der Menge Q als Grenzwerte annehmen kann, z. B. als Werte $f(x'+0)$. Diese Möglichkeit beruht darauf, dafs die Menge Q durch eine in Q überall dichte, abzählbare Menge V bestimmt ist. Ist nämlich

$$V=(v_1,\ v_2,\ \cdots\cdots v_\lambda,\ \cdots\cdots)$$

diese Menge, so denken wir uns aus der Menge aller Werte von x eine abzählbare, nirgends dichte Menge X ausgewählt und diese wieder in eine abzählbare Menge anderer Mengen

$$X_1=\{x_{1\nu}\},\quad X_2=\{x_{2\nu}\},\quad \cdots\cdots\quad X_\lambda=\{x_{\lambda\nu}\},\ \cdots$$

zerlegt, die sämtlich nur den Punkt x' als Grenzpunkt haben. Wir bestimmen nun eine Function $f(x)$ so, dafs die Wertmengen

$$\{f(x_{1\nu})\},\quad \{f(x_{2\nu})\},\ \cdots\ \{f(x_{\lambda\nu}\},\ \cdots$$

1) Giorn. di Mat. 19, S. 76. Der Satz findet sich dort nur für eine Function einer einzigen Variablen ausgesprochen. In ihm kommt der Gegensatz zwischen Mengen erster und zweiter Kategorie zum Ausdruck.

2) Ist p Grenzpunkt der Punkte $p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_\nu,\ \ldots$, so wird jede Reihe $F(p_1),\ F(p_2),\ \ldots\ F(p_\nu),\ \ldots$, falls sie eine Fundamentalreihe ist, einen solchen Wert q liefern.

gegen $v_1, v_2, \cdots v_\lambda, \cdots$ convergiren, dafs aber im übrigen $f(x)$ beliebig, also z. B. für alle Punkte der Complementärmenge X_g von X constant ist, so ist damit eine Function der verlangten Beschaffenheit construirt. Dafs an der Stelle x die Werte von V selbst angenommen werden können, ist nämlich unmittelbar klar; man kann aber auch Werte x_{ik} so wählen, dafs die zugehörigen Werte der Function gegen irgend einen Punkt von V_g convergiren[1]).

Die vorstehenden Sätze stammen von Bettazzi[2]). Dem in ihnen enthaltenen sehr allgemeinen Resultat kommt jedoch bei näherer Betrachtung nur eine secundäre Bedeutung zu. Es beruht dies darauf, dafs der Function sozusagen ein gewisser äufserlicher Bestandteil anhaften kann, von dem sie sich aber reinigen läfst. Hierzu gelangt man, wenn man einem Gedanken nachgeht, der sich bei Brodén methodisch durchgeführt findet, und der darauf hinausläuft, die Stetigkeitspunkte als die bestimmenden Elemente punktweise unstetiger Functionen zu betrachten. Ist nämlich U die Menge der Stetigkeitspunkte einer in P punktweise unstetigen Function $F(p)$, so wollen wir in einem Unstetigkeitspunkt nur alle diejenigen Werte ins Auge fassen, die sich aus den Werten, die die Function in U hat, durch den bezüglichen Grenzprocefs ergeben. Wir übertragen also den oben für stetige Functionen erörterten Erweiterungsprocefs auch auf die punktweise unstetigen Functionen[3]). Wir beantworten damit zugleich die Frage, wie überhaupt eine Function beschaffen ist, wenn sie durch diesen Erweiterungsprocefs aus einer Function entsteht, die für eine in sich dichte Menge U stetig ist, ohne jedoch gleichmäfsig stetig zu sein. Gerade von dieser Aufgabe ist T. Brodén ausgegangen.

---

1) Ein einfaches Beispiel, in dem die Menge V abzählbar ist, ist das folgende. Man definire für ganzzahliges ν

$$f\left(\frac{1}{2^\nu}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{3^\nu}\right) = \frac{1}{3}, \cdots \quad f\left(\frac{1}{p^\nu}\right) = \frac{1}{p}, \cdots,$$

wo p eine Primzahl ist, sonst aber $f(x) = 0$, so ist die Menge V der Werte von $f(+0)$ durch

$$V = \left(\frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{p}, \cdots\right)$$

gegeben, und es ist klar, dafs auch der Wert 0 möglicher Wert von $f(+0)$ ist. Man vgl. auch die weiteren auf S. 137 angeführten Nullfunctionen.

2) Rend. di Palermo 6, S. 173.

3) Um ein Beispiel zu geben, so betrachte man die Abbildung des Continuums $C = X + X_g$ auf die Menge $T = T_e + T_g$ (S. 79). Diese Abbildung ist für jeden Punkt von X_g stetig; ihm entspricht ein Punkt von T_g. Durch die Abbildung von X_g auf T_g ist aber zugleich die Gesamtabbildung bestimmt, resp. damit sind die beiden Werte von T_e resp. von T_l und T_r, die irgend einem Wert von X entsprechen, von selbst gegeben.

Um hier präcise zu verfahren, werde eine Function $\Phi(u) = \Phi(q, U)$ so definirt, daſs sie an den Stetigkeitsstellen mit $F(q)$ übereinstimmt, also für jeden Wert u

$$\Phi(u) = F(u)$$

ist. Ist nun wie oben $q = u_\omega$ ein durch die Folge

$$\{u_\nu\} = u_1, \; u_2, \cdots u_\nu, \cdots$$

dargestellter Punkt, so wird die Functionsfolge

$$\{F(u_\nu)\} = F(u_1), \; F(u_2), \cdots F(u_\nu), \cdots$$

für jede Folge, die q darstellt, gegen einen festen Wert convergiren oder nicht; und wir wollen nun im Anschluſs an Brodén der erweiterten Function im Punkt q alle Werte zuordnen, die durch eine Folge $\{F(u_\nu)\}$ dargestellt werden, so daſs $\Phi(q)$ in q auch mehrdeutig und sogar unendlich vieldeutig sein kann. Alsdann folgt zunächst, daſs die erweiterte Function $\Phi(q)$ immer dann in Q stetig ist, falls sie überall eindeutig ist. Ist sie in einem Punkt mehrdeutig, so soll er wiederum Unstetigkeitspunkt von Φ heiſsen[1]); und es gilt der Satz:

VI. Entsteht aus der für eine in sich dichte Menge U stetigen Function $\Phi(u)$ durch Erweiterung keine in $Q = U'$ überall stetige Function $\Phi(q)$, so ist diese Function notwendig punktweise unstetig.

Um dies in bindender Form zu erhärten, weisen wir nach, daſs die Punkte von U auch für $\Phi(q)$ Stetigkeitspunkte sind. Sei nämlich u irgend ein Wert der Menge U, und

$$(3) \qquad u_1', \; u_2', \; u_3', \cdots u_\nu', \cdots$$

irgend eine ihn darstellende Folge von Punkten, die beliebig zu U oder U_g gehören, ferner seien

$$(4) \qquad F(u_1'), \; F(u_2'), \cdots F(u_\nu'), \cdots$$

irgend welche zu den u_ν' gehörige Functionswerte; alsdann ist zu zeigen, daſs sie eine Folge bilden, und daſs ihr Wert gleich $F(u)$ ist. Dazu denke man sich eine Reihe gegen Null convergirender Gröſsen $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_\nu > \cdots$ beliebig angenommen, so giebt es stets Werte u_ν nahe bei u_ν' so, daſs

$$|F(u_\nu') - F(u_\nu)| < \varepsilon_\nu$$

ist, welchen der verschiedenen möglichen Werte $F(u_\nu')$ auch haben möge. Man kann daher Punkte

1) Die Differenz zwischen dem gröſsten und kleinsten Functionswert von $F(p)$ an der Stelle p kann als Unstetigkeitsintervall $\varkappa$ an der Stelle p bezeichnet werden. Brodén sagt dafür latitude. (Acta Univ. Lund. 8, S. 14.)

$$u_1, u_2, u_3, \cdots u_\nu, \cdots$$

so wählen, dafs sie u als Grenzpunkt haben und zugleich die Reihe

$$F(u_1), F(u_2), \cdots F(u_\nu), \cdots$$

eine Folge bildet und der Folge (4) gleich ist. Diese Folge stellt aber der Voraussetzung nach den Wert $F(u)$ dar, also auch die obige.

Der vorstehende Satz ist zwar von Brodén nicht direct ausgesprochen worden; doch habe ich die Beweismethode von ihm entlehnt; er benutzt sie für eine die Ableitungen stetiger Functionen betreffende Frage[1]).

5. Die vorstehende Darstellung punktweise unstetiger Functionen besitzt zunächst den praktischen Vorteil, dafs eine abzählbare Menge von Vorschriften genügt, um die Function für eine perfecte Menge, resp. ein Continuum festzulegen. Brodén hat eine Reihe von Beispielen punktweise unstetiger Functionen auf diese Weise construirt[2]). Freilich kann nicht jede für eine Menge Q punktweise unstetige Function durch Erweiterung einer für eine Menge U stetigen Function hergestellt werden, wie sich sofort ergeben wird. Wichtiger jedoch als der praktische Vorteil, den die obige Auffassung hat, ist der theoretische. Wir entnehmen ihr zunächst eine meines Erachtens naturgemäfse Analyse und Einteilung der punktweise unstetigen Functionen, und zwar auf Grund folgender Überlegungen.

Sei jetzt $F(q)$ irgend eine in Q punktweise unstetige Function und $\Phi(q)$ die Function, die durch Erweiterung aus $\Phi(u)$ entsteht, wo jetzt U die Menge aller Stetigkeitspunkte von $F(q)$ sein darf, so stimmen $F(q)$ und $\Phi(q)$ in allen Stetigkeitspunkten dem Werte nach überein. Ist q ein Unstetigkeitspunkt $\omega = k$ von $F(q)$, so ist in jeder um q gelegten Kugel H die Schwankung von $\Phi(q)$ niemals gröfser als diejenige von $F(q)$. Da nämlich jeder Wert von Φ eine Folge solcher Werte ist, die $\Phi(q)$ an den Stetigkeitsstellen u hat, so ist die obere und untere Grenze aller Werte von Φ in H identisch mit der unteren und oberen Grenze aller Werte, die Φ an den Stetigkeitsstellen innerhalb H besitzt. Diese Werte bilden aber nur einen Teil der Werte von $F(q)$ in H. Es ist daher, falls q für $\Phi(q)$ ein Punkt $\omega = k_\varphi$ ist, stets $k_\varphi \leq k$. Ist insbesondere $k_\varphi = 0$, so dafs q Stetigkeitspunkt von $\Phi(q)$ ist, so wird man zweckmäfsig die Unstetigkeit als unwesentlich oder äufserlich bezeichnen. Ist dagegen $k_\varphi > 0$, so ist die Unstetigkeit von $F(q)$ als eine wesentliche oder notwendige zu betrachten, sie soll aber wieder teilweise äufserlich heifsen, falls $k_\varphi < k$ ist[3]).

1) Journ. f. Math. 118, S. 6.

2) Acta Univ. Lund. 8, S. 17ff.

3) Study nennt die Gröfse $k - k_\varphi$ den äufseren Sprung an der Stelle q, wenn q eine eigentliche Sprungstelle einer Function einer Variablen ist. Math. Ann. 47, S. 301.

Wir definiren nun eine Function $\Psi(q)$ so, daſs an jeder Stelle q

$$\Psi(q) = \pm (k - k_\varphi)$$

sein soll; es ist dann $\Psi(q)$ erstens an allen Stetigkeitsstellen von $F(q)$ Null, sowie an denjenigen Unstetigkeitsstellen, in denen $k = k_\varphi$ ist, und alle diese Stellen sind Stetigkeitsstellen von $\Psi(q)$. Ist dagegen $k_\varphi < k$, ist also die Unstetigkeit in q ganz oder teilweise äuſserlich, so ist $\Psi(q)$ von Null verschieden, und es ist q eine Unstetigkeitsstelle vom Grade $k_\psi = k - k_\varphi$ für $\Psi(q)$; man kann überdies das Vorzeichen so wählen, daſs die Function

$$F_1(q) = F(q) - \Psi(q)$$

keinerlei äuſserliche Unstetigkeiten mehr enthält, also jeder Unstetigkeitspunkt von $F_1(q)$ wesentlich ist, und sein Grad mit demjenigen von $\Phi(q)$ übereinstimmt. Eine Function $\Psi(q)$ dieser Art ist gelegentlich von Neumann als eine im allgemeinen verschwindende bezeichnet worden; ich möchte sie aber als punktweise unstetige Nullfunction oder kurz als Nullfunction bezeichnen, da wir es hier immer mit punktweisè unstetigen Functionen zu thun haben. Alsdann folgt:

VII. Eine beliebige punktweise unstetige Function $F(q)$ kann durch Subtraction einer geeigneten Nullfunction in eine solche Function übergeführt werden, deren Unstetigkeitsgrad an jeder Stelle mit demjenigen der zugehörigen Function $\Phi(q)$ übereinstimmt.

Es empfiehlt sich nun vielfach, die Function $F_1(q)$ geradezu mit $\Phi(q)$ zu identificiren, indem man der Function $\Phi(q)$ an den Unstetigkeitsstellen denjenigen Wert beilegt, den $F_1(q)$ besitzt, und der immer demjenigen Unstetigkeitsintervall angehört, das die zulässigen Werte von $\Phi(q)$ enthält[1]. Dasselbe erreicht man aber auch umgekehrt dadurch, daſs man die bisher festgehaltene Eindeutigkeit von $F(q)$ resp. $F_1(q)$ fallen läſst und auch $F_1(q)$ an einer Unstetigkeitsstelle irgend einen Wert beilegt, den $\Phi(q)$ annehmen kann. Alsdann hat man in jedem Fall:

$$F(q) = \Phi(q) + \Psi(q),$$

und diese Gleichung bedeutet eine Zerlegung von $F(q)$ in zwei Functionen, von denen die eine als die Function der wesentlichen oder notwendigen Unstetigkeiten bezeichnet werden darf, d. h. derjenigen, die durch die Stetigkeitspunkte bedingt werden, während die andere eine Nullfunction ist und die Function der unwesentlichen oder äuſserlichen Unstetigkeiten darstellt. Ich werde die Function $\Phi(q)$ auch als die zu $F(q)$ gehörige Function

1) Vgl. die Anm. 1 auf S. 132.

geringster Unstetigkeit oder als möglichst stetige Function bezeichnen.

6. Die hier zu Grunde gelegte Auffassung, die Reinigung der Function $F(q)$ von der ihr etwa anhaftenden Nullfunction und die Einführung der teilweise mehrwertigen oder unendlich vielwertigen Function $\Phi(q)$ ist sowohl theoretisch, wie auch für die späteren Anwendungen von Vorteil und ist, wenn auch nicht generell, so doch für einzelne Zwecke schon gelegentlich geschehen[1]). Ihr Nutzen wird überall da in die Erscheinung treten, wo der Wert, den $F(q)$ an einer Unstetigkeitsstelle besitzt, mehr oder weniger belanglos ist. Übrigens findet sich der Übergang von $F(q)$ zu $\Phi(q)$ im Keime auch schon bei Pasch[2]), und zwar in der Einführung des Begriffs der Schwingung an Stelle der Schwankung der Function. Die Schwingung abstrahirt nämlich von dem Functionswert in dem Punkt, auf den sie sich bezieht, was, wenn es für die Gesamtfunction ausgeführt wird, der Einführung von $\Phi(q)$ im wesentlichen äquivalent ist.

Da die Structur der Functionen $\Psi(q)$ eine einfache und durchsichtige ist[3]), so ist durch das vorstehende die weitere Analyse der punktweise unstetigen Functionen auf diejenige der Functionen $\Phi(q)$ zurückgeführt. Diese Analyse hat naturgemäfs daran anzuknüpfen, welches die Menge der Werte von $\Phi(q)$ an einer Unstetigkeitsstelle ist, und welcher Art die einzelnen Mengen K_ν resp. die Gesamtmenge $\{K_\nu\}$ sind. Was insbesondere die Menge der Werte von $\Phi(q)$ an einer Unstetigkeitsstelle q betrifft, so wird man wiederum unterscheiden müssen, ob sie endlich oder abzählbar oder von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ ist. Für Functionen einer Variablen giebt es sowohl links als rechts entweder nur je einen Wert, oder ihre Menge hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ und erfüllt ein ganzes Intervall, wie man leicht zeigen kann. Im Gegensatz zu dem Satz V bietet also eine Function $\Phi(x)$ durchaus einfache Eigenschaften dar; dieser Satz haftet nur an der ihr etwa beigemengten Nullfunction. Für Functionen $\Phi(q)$ mehrerer Variablen trifft dies jedoch nicht mehr zu; bei ihnen dürften alle in diesem Satz vorgesehenen Möglichkeiten wirklich auftreten können.

Da die zu einer Nullfunction $\Psi(q)$ gehörige möglichst stetige Function überall Null ist, so folgt schliefslich, dafs nur solche Functionen auf dem von Brodén eingeschlagenen Wege erhältlich sind, die von Nullfunctionen frei sind. Andererseits ist aber auch jede solche Function so erzeugbar, wie unmittelbar klar ist. Beispiele

---

1) So z. B. in den neueren Arbeiten über die Bogenlänge; vgl. Scheeffer, Acta Math. 5, S. 57 ff., sowie Study, Math. Ann. 47, S. 314. Vgl. auch den Teil dieses Berichts, der vom Integralbegriff handelt.

2) Math. Ann. 30, S. 139. Vgl. auch S. 139 dieses Berichts.

3) Vgl. über sie S. 137 ff. dieses Berichts.

aller dieser Kategorien sind a. a. O. zu finden[1]). Dabei ist nicht zu vergessen, dafs hier von dem Functionswert an der Unstetigkeitsstelle abgesehen wird. Dafs er ebenfalls ein Recht hat, in Rücksicht genommen zu werden, ist klar; hierauf kommen wir weiter unten (10) zurück.

7. Bei den Functionen einer Variablen x sind am häufigsten solche Fälle bekannt geworden, bei denen jede Menge K_ν endlich ist, während $\{K_\nu\}$ überall dicht ist; an jeder Unstetigkeitsstelle ist $\Phi(q)$ zweiwertig, resp. es existirt ein rechter und linker Grenzwert. Ein klassisches Beispiel hierzu bietet die von Riemann construirte Function

$$F(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \cdots,$$

die an allen irrationalen Punkten stetig, an den rationalen dagegen unstetig ist und an jeder Unstetigkeitsstelle einen eigentlichen Sprung besitzt[2]).

In diese Kategorie gehören auch die meisten anderen punktweise unstetigen Functionen, die man durch analytische Ausdrücke zu bilden vermocht hat, insbesondere diejenigen, die durch das Princip der Verdichtung der Singularitäten definirbar sind. Solche Functionen sind von den verschiedensten Seiten in mannigfacher Weise construirt resp. aufgefunden worden[3]). Zu ihnen gehören auch diejenigen punktweise unstetigen Functionen, denen man in neuerer Zeit nach dem Vorgang von Scheeffer und Jordan eine Bogenlänge beilegt[4]).

Man kann es sogar erreichen, dafs die Function monoton ist. Ein einfaches und zugleich typisches Beispiel dieser Art bildet die von Harnack angegebene Abbildung des Continuums auf eine nirgends dichte Menge, die durch Beziehung der Mengen $R = \{r\}$ und $D = \{\delta\}$ bewirkt werden kann[5]) (S. 64 u. 78). Ebenso führt die von Cantor angegebene Abbildung der Menge der rationalen Zahlen $R = \{r\}$ auf sich selbst, bei der die Ordnung erhalten bleibt, im allgemeinen auf punktweise unstetige Functionen dieser Art[6]).

1) Brodén hat sich auch mit dem Fall beschäftigt, dafs die für eine in sich dichte Menge U definirte Function in U selbst punktweise unstetig ist, und hat auch auf sie den Erweiterungsprocefs ausgedehnt; doch führt dies nicht zu neuen Auffassungen oder Resultaten, die zu erwähnen wären.

2) Gesammelte math. Werke, S. 242.

3) Für die Literatur vgl. z. B. Encykl. d. math. Wiss. II, 1, S. 41.

4) Vgl. hierüber den vierten Abschnitt.

5) Um die eindeutige Abbildung Harnack's zu erhalten, hat man von jedem δ nur einen Endpunkt beizubehalten. Peano hat eine Function dieser Art durch die Vorschrift bestimmt, dafs $x = 0, a_1 a_2 \cdots$ und $y = 0, 0a_1 0a_2 \cdots$ entsprechende Werte seien. Riv. di mat. 2, S. 42.

6) Man denke sich die Menge R einerseits der Gröfse nach geordnet, andererseits aber auf irgend zwei Arten in eine abzählbare Menge verwandelt, also

$$R = (r_1, r_2, r_3, \cdots) \quad \text{und} \quad M = (m_1, m_2, m_3, \cdots).$$

Ein hierhergehöriges Beispiel bietet auch die Peano'sche resp. die Hilbert'sche Abbildung, wenn man die Abscissen x der Punkte der Einheitsstrecke als Functionen der Quadratpunkte p auffaſst. Für jeden Punkt von P_g ist die abbildende Function eindeutig und stetig; zu jedem Punkt von P gehören dagegen mehrere Werte von x. Denkt man sich in jedem Quadratpunkt p den zugehörigen Wert von x auf dem Lot über der Quadratebene abgetragen, so hat man ein flächenhaftes Bild der Abbildungsfunction. Zieht man nun innerhalb des Quadrats eine beliebige Curve, insbesondere eine Gerade, so wird dadurch ein cylindrischer resp. ein ebener Schnitt definirt, der in jedem Punkt von P einen eigentlichen Sprung besitzt und eine Function $\Phi(q)$ derselben Gattung darstellt wie die oben betrachteten[1].

Functionen, für die jedes K_ν eine unendliche Menge darstellt, sind in neuerer Zeit ebenfalls mehrfach angegeben worden. Setzt man noch

$$K_{\nu+1} = K_\nu + G_\nu,$$

so kann man sogar erreichen, daſs jedes G_ν unendlich ist[2]), ja sogar, daſs jedes G_ν die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt. Beispiele der letzten Art hat insbesondere Brodén durch Aufstellung geeigneter Vorschriften construirt, und zwar mittelst der oben S. 106 erwähnten Mengen K_ν, die überdies die Eigenschaft haben, daſs die Gesamtmenge $\{K_\nu\}$, resp. $\{G_\nu\}$ die Einheitsstrecke überall dicht erfüllt. Die von Brodén mit diesen Mengen construirten Functionen sind übrigens sämtlich Nullfunctionen[3]). Ähnliche Functionen hat auch der Verfasser construirt, und dies sogar so, daſs die Gesamtheit aller Mengen G ebenfalls die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt. Zu jedem Wert $0 < \xi \leqq 1$ giebt es nämlich eine Menge G_ξ der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, so daſs in ihr $\omega = \xi$ ist, und dies kann sowohl so bewirkt werden, daſs die Gesamtmenge $\{G_\xi\}$

Alsdann ordne man dem r_1 das Element m_1 zu, ferner dem r_2 das erste Element m_i, das zu m_1 dieselbe Rangbeziehung hat wie r_2 zu r_1, ferner dem r_3 das erste Element m_x, das zu m_i und m_1 die gleiche Rangbeziehung hat wie r_3 zu r_2 und r_1 u. s. w. Man beweist dann noch leicht, daſs auch jedes Element m bei der Abbildung verwandt wird (Math. Ann. 46, S. 504). Man kann übrigens durch diese Abbildung auch zu stetigen Functionen gelangen. Diese Functionen sind also für alle rationalen Werte selbst rational. Vgl. für diesen Punkt auch S. 121 dieses Berichts.

1) Es steht dies nicht damit in Widerspruch, daſs manchen Punkten von P vier Werte x zugehören. In diesen Punkten von P stoſsen für jede fortgesetzte Quadratteilung je vier Teilquadrate zusammen, und die bezügliche Gerade passirt immer nur zwei dieser Quadrate. Zwei der vier Functionswerte stellen also eine in dem oben genannten Sinn (S. 133) teilweise äuſserliche Unstetigkeit dar. Nur wenn die Gerade eine der Teilungslinien selbst ist, tritt davon eine Ausnahme ein; dann entsprechen jedem ihrer Punkte zwei oder vier Werte x, und der bezügliche Schnitt besteht aus zwei verschiedenen Curven.

2) Vgl. z. B. Volterra, Giorn. di mat. 19, S. 78.

3) Vgl. auch Cap. 7 dieses Abschnitts.

überall dicht, wie auch nirgends dicht ist[1]). Auch diese Functionen sind Nullfunctionen.

Functionen dieser Art, die keine Nullfunctionen sind, scheinen bisher nicht aufgestellt worden zu sein; es ist aber leicht ersichtlich, dafs es auch Functionen geben kann, für die die Menge K unendlich, oder gar $\mathfrak{k} = \mathfrak{c}$ ist, und für die $\Phi(q)$ nicht Null oder überhaupt eine stetige Function ist. Offenbar ist dies auch so möglich, dafs jedes $\mathfrak{k}_\nu = \mathfrak{c}$ ist, und die Gesamtmenge $\{K_\nu\}$ überall dicht liegt; um eine solche Function zu erhalten, hat man nur zu einer der eben genannten Nullfunctionen eine solche Function zu addiren, deren zugehörige Function $\Phi(q)$ an allen Unstetigkeitsstellen zweiwertig ist, und für die $\{K_\nu\}$ überall dicht ist. Um hier zu weitergehenden Einteilungen zu gelangen, dürfte es sich daher empfehlen, auch für die Functionen $\Phi(q)$ eine weitere Reduction zu versuchen, indem man von einer beliebigen Function dieser Art erst eine solche Function $\Phi(q)$ abzuspalten sucht, die an allen Unstetigkeitsstellen zweiwertig ist. Die Restfunction würde dann eine Function sein, der an allen Unstetigkeitsstellen eine continuirliche Wertmenge entspricht. Auch diese Functionen sind jedenfalls noch so möglich, dafs die Menge $\{K_\nu\}$ überall dicht liegt, jedes G_ν die Mächtigkeit $\mathfrak{g}_\nu = \mathfrak{c}$ besitzt, und die K_ν eine abzählbare Menge bilden[2]).

8. Für Functionen $F(x)$ einer reellen Variablen giebt es eine Reihe von Sätzen, die gestatten, aus dem Verhalten der Function an den einzelnen Punkten auf gewisse Eigenschaften der Mengen K zu schliefsen. Zuvor erinnere ich an einige besondere Begriffe, die man für Functionen einer reellen Variablen eingeführt hat; in der Bezeichnung schliefse ich mich an Pasch an[3]). Wird bei Ermittelung der einem Intervall $a \cdots b$ entsprechenden Schwankung

---

1) Nachr. d. Gött. Ges. d. Wiss. 1899, S. 171.

2) Ein einfaches Beispiel dieser Art ist das folgende. Man gehe von einer Menge $D = \{\delta\}$ aus, die eine perfecte Menge T bestimmt. Für jedes Intervall δ construire man eine Function $k \sin \frac{\delta}{(x - \xi_l)}$, so dafs ihr Unstetigkeitspunkt dem Intervallendpunkt ξ_l von δ entspricht, und der Function in den Punkten von T ein beliebiger Wert u beigelegt wird, so dafs $|u| < k$ ist. Die so bestimmte Function sei $f(x)$. Nun setze man in jedes dieser Intervalle δ wieder je eine Intervallmenge $D' = \{\delta'\}$ und in jedes Intervall δ' eine Function $k' \sin \frac{\delta'}{x - \xi_l'}$, so dafs ihre Werte u' in T' sämtlich die Bedingung $|u'| < k'$ erfüllen, und nenne die so bestimmte Function $f_1(x)$. So kann man fortfahren. Wird alsdann $\Sigma k^{(\nu)}$ als absolut convergent angenommen, so stellt $F(x) = \Sigma f_\nu(x)$ eine Reihe dar, die für jeden allen $f_\nu(x)$ gemeinsamen Stetigkeitspunkt selbst stetig ist, und die im übrigen die verlangte Eigenschaft besitzt.

3) Math. Ann. 30, S. 139.

von dem Wert der Function im Punkte x abgesehen, so geht die Schwankung in die dem Intervall entsprechende Schwingung[1]) über; endlich ergiebt sich die innere Schwankung oder Schwingung, falls man dem Intervall $a \cdots b$ die Endpunkte nicht zurechnet. Alle diese Gröfsen können überdies auch nur einseitig in Betracht gezogen werden[2]). Von ihnen gilt der Satz:

VIII. Sind im Intervall $a \cdots b$ alle einseitigen Schwingungen $< k$, so ist die Menge K der Punkte $\omega \geqq k$ endlich; man kann daher das Intervall in eine endliche Anzahl von Teilintervallen zerlegen, in deren jedem die innere Schwankung $< k$ ist[3]).

Die Endlichkeit der Menge K ergiebt sich unmittelbar daraus, dafs ohne dies ein Unstetigkeitspunkt zweiter Art $\omega \geqq k$ vorhanden wäre, und es könnten in ihm nicht beide einseitigen Schwingungen $< k$ sein. Es zerfällt also $a \cdots b$ bereits in eine endliche Anzahl von Intervallen, die keinen Punkt $\omega \geqq k$ im Innern enthalten. Hieraus kann der Satz nach dem Heine-Borel'schen Theorem direct geschlossen werden.

Ich erwähne ferner die folgenden beiden Sätze, die auf Dini zurückgehen:

IX. Eine Function ist punktweise unstetig, falls sie an einer überall dichten Menge einen einseitigen Grenzwert zuläfst[4]).

X. Wenn im Intervall $a \cdots b$ alle hinteren oder vorderen Schwingungen $< k$ sind, so ist die Menge K unausgedehnt[5]).

Der erste Satz folgt unmittelbar aus der Bemerkung, dafs unter der für ihn gemachten Voraussetzung keine Menge K überall dicht sein kann. Für den zweiten Satz gehen wir auf die Formel

$$K = R + S = R + K^{\Omega}$$

zurück. Wäre nun S von Null verschieden, so würde, da S perfect ist, in jedem Punkt von K_g sowohl die linke wie die rechte Schwingung $\geqq k$ sein. Daher ist $S = 0$ und K abzählbar, also auch unausgedehnt.

9. Über Functionen von zwei und mehr Variablen liegen bisher nur wenige Einzeluntersuchungen vor[6]). Man weifs seit längerer Zeit

1) Vgl. auch oben S. 135.

2) Hierüber haben besonders die italienischen Mathematiker gearbeitet, wie Ascoli, Peano und andere.

3) Vgl. Pasch, Math. Ann. 30, S. 140.

4) Vgl. Dini, Grundlagen § 151.

5) In dieser Form stammt der Satz von Pasch, a. a. O., S. 141; vgl. auch Dini, Grundlagen, § 187, 4.

6) Die meisten dieser Untersuchungen beziehen sich überdies auf das Verhalten an einem einzelnen Punkt. Ich nenne insbesondere Ascoli,

durch Beispiele, dafs die ausnahmslose Stetigkeit einer Function $F(x, y)$ nach x resp. nach y einzeln die ausnahmslose Stetigkeit für x und y nicht nach sich zieht. Erst R. Baire hat es jedoch in einer ganz kürzlich erschienenen Arbeit unternommen, die allgemeine Gesetzmäfsigkeit zu prüfen, gemäfs der die Stetigkeit für beide Variablen von der Stetigkeit für jede einzelne Variable abhängt. Man kann sich leicht Beispiele bilden, die zeigen, dafs die Function in x und y total unstetig sein kann, trotzdem sie in einer überall dichten Punktmenge für x resp. y einzeln stetig ist[1]); ja sie kann es auch dann noch sein, falls die Stetigkeit nach x resp. nach y für je eine überall dichte Curvenschar vorhanden ist. Dagegen geht aus den Untersuchungen Baire's hervor, dafs die Function in einem Gebiet H nicht mehr total unstetig sein kann, wenn sie in jedem Punkt von H stetig in x und y allein ist. Sein Satz verlangt sogar nur, dafs in allen Punkten Stetigkeit nach der einen Variablen, und in den Punkten einer überall dichten Curvenschar nach der andern vorhanden sei. Für den Beweis hat sich Baire auf den einfacheren Fall beschränkt, dafs die Function in allen Punkten stetig nach y ist, und in einer überall dichten Schar von Parallelen zur x-Axe stetig nach x, doch ist dies keine wesentliche Specialisirung.

Um zu zeigen, wie Baire diese Untersuchung durchgeführt hat, erwähne ich zunächst eine von ihm herrührende Erweiterung der Stetigkeitsbegriffe. Ist $F(x, y, \cdots)$ eine Function beliebig vieler Variablen, die für eine Menge $P = \{p\}$ definirt ist, und H_ν die um p mit dem Radius ϱ_ν gelegte Kugel, so operirt er nicht unmittelbar mit der Schwankung σ_ν für die Kugel H_ν, sondern mit der oberen und unteren Grenze aller Functionswerte, die $F(p)$ für die Kugel H_ν resp. für die in ihr enthaltenen Punkte von P besitzt. Ist F_o die obere Grenze aller dieser Werte von $F(p)$, und F_u die untere Grenze, so convergiren F_o und F_u mit abnehmendem ϱ_ν gegen zwei Gröfsen $\varphi(p)$ und $\psi(p)$, die man als obere resp. untere Wertgrenze der Function im Punkt p bezeichnen kann. Ist ω wieder der Unstetigkeitsgrad in p, so ist

$$\omega = \varphi(p) - \psi(p),$$

während zugleich

Ann. di mat. (2) Bd. 19 und 20, sowie Arzelà, Rend. dell' Acc. di Bologna 1883, S. 3. Vgl. auch Thomae, Elementare Theorie, S. 39.

1) Man ziehe z. B. durch alle rationalen Punkte Parallelen zu den Axen und bestimme auf jeder von ihnen die Function so, dafs sie für $x = p/q$ und für $y = p_1/q_1$ den Wert $f(x, y) = 1/q\,q_1$ hat, in den übrigen Punkten dieser Parallelen den Wert Null, und in allen übrigen Punkten den Wert 1. Das obige Resultat entspricht dem Umstand, dafs jede Menge K^x und jede Menge K^y abgeschlossen sein kann, ohne dafs die ebene Menge K abgeschlossen ist. Vgl. S. 97. Auch die dort gegebenen Beispiele sind hier verwendbar.

$$\varphi(p) \geqq F(p) \geqq \psi(p)$$

ist. Ist nun $\varphi(p) = F(p)$, so nennt Baire die Function $F(p)$ an der Stelle p oberhalb stetig; ist $F(p) = \psi(p)$, so heifst sie unterhalb stetig[1]). Auch diese Begriffe sind davon unabhängig, ob der Kugel H_ν die Punkte der Oberfläche hinzugerechnet werden oder nicht. Eine oberhalb resp. unterhalb stetige Function nennt Baire allgemein halbstetig[2]). Es besteht nun der folgende Satz:

Ist $f(p)$ eine im Bereich H oberhalb stetige Function, für die in jedem Punkte die untere Wertgrenze Null ist, so nimmt die Function in einer in H überall dichten Punktmenge den Wert Null an[3]) und ist also eine Nullfunction.

Der Beweis läfst sich folgendermafsen führen: Sei $\varepsilon > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ eine Reihe gegen Null convergirender Zahlen. Ist H_0 ein beliebiger Teilbereich von H, so giebt es in ihm sicher Punkte p, so dafs $f(p) < \varepsilon$ ist, und wegen der oberen Stetigkeit folgt, dafs es eine gewisse Umgebung H_1 für p giebt, so dafs dort überall

$$f < f(p) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

ist. Analog findet man innerhalb H_1 einen Bereich H_2, in dem überall $f < 2\varepsilon_1$ ist, und man gelangt so zu einer Folge einander einschliefsender Bereiche

$$H_0,\ H_1,\ H_2,\ \cdots\ H_\nu,\ \cdots,$$

die mindestens einen Punkt p_ω bestimmen, so dafs $f(p_\omega) < \varepsilon_\nu$ ist für jedes ν, womit der Satz bewiesen ist. Aus diesem Satz schliefst man nun durch Umkehrung den folgenden:

Ist eine oberhalb stetige Function $f(p)$ in einem Gebiet H überall gröfser als Null, so bilden die Punkte, in denen $f(p)$ die untere Wertgrenze Null hat, notwendig eine nirgends dichte Menge. Die Function ist also keine Nullfunction.

Nunmehr geht der Beweis des bezüglichen Satzes folgendermafsen vor sich. Da die Function $F(x, y)$ überall nach y stetig sein soll, so wird sie, falls man zunächst dem x einen constanten Wert beilegt, in eine für alle Werte y stetige Function $\Phi(y)$ übergehen. Wird alsdann σ beliebig angenommen, so gehört dazu für jedes y ein bestimmtes gröfstes Intervall $2\delta = \delta_\sigma$, innerhalb dessen

---

1) Die einfachste oberhalb stetige Function ist die zu einer Function $F(p)$ gehörige Function $\omega(p)$ selbst. Diese Function hat bereits Volterra als Function der Sprünge eingeführt (Giorn. di mat. 19, S. 82), wenigstens für Functionen einer Variablen. Die obigen Begriffe decken sich zum grofsen Teil, wenn auch nicht ganz, mit der Reduction von $F(p)$ auf $\Phi(p)$.

2) Ann. di. mat. (3) 3, S. 4 ff.

3) Baire giebt a. a. O. (S. 12) Beispiele, die zeigen, dafs der Satz nicht gilt, wenn nur eine der beiden Bedingungen erfüllt ist.

die Schwankung von $\Phi(y)$ höchstens gleich σ ist. Faſst man diese Gröſse δ_σ als Function des Punktes $p = (x, y)$ auf, so zeigt Baire zunächst durch einfache Überlegungen, daſs sie eine oberhalb stetige Function ist; andererseits aber ist δ_σ in jedem Punkt p gröſser als Null, und daraus folgt auf Grund des letzten Satzes, daſs die Punkte, in denen die untere Wertgrenze von δ_σ Null ist, eine nirgends dichte Menge bilden. Diese Menge ist überdies, wie leicht ersichtlich ist, abgeschlossen; wir bezeichnen sie durch G_σ resp. durch G. Man beweist nun weiter[1]), daſs es um jeden nicht zu G gehörigen Punkt m einen endlichen Bereich giebt, in dem die Schwankung der Function $F(x, y)$ selbst kleiner als 2σ ist. Sind dann wieder $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \cdots > \sigma_\nu > \cdots$ beliebige gegen Null convergirende Gröſsen, so haben die zugehörigen Mengen

$$G_1, G_2, G_3, \cdots G_\nu, \cdots$$

wieder die Eigenschaft, daſs jede die vorhergehenden als Teilmengen enthält. Ist jetzt δ_1 ein zu G_1 gehörender punktfreier Bereich, so folgert man, wie S. 81, daſs die Bereiche $\delta_1, \delta_2, \cdots$ gegen einen Bereich δ_ω oder gegen einen Punkt convergiren, und jeder dieser Punkte ist ein Stetigkeitspunkt von $F(x, y)$. Also folgt:

XI. Ist eine Function $F(x, y)$ überall stetig nach der einen Variablen, und längs einer überall dichten Geradenschar nach der andern, so ist sie in beiden Variablen höchstens punktweise unstetig.

10. Baire hat auch die allgemeine Analyse der punktweise unstetigen Functionen einen Schritt weiter geführt[2]). Oben wurde wesentlich die allgemeine Natur der Unstetigkeitspunkte und ihre Verteilung in Betracht gezogen; auſserdem kann aber auch noch der besondere Wert, den die Function an der Unstetigkeitsstelle hat, Gegenstand der Erörterung werden. Von diesem Wert hängt es nämlich ab, ob sich die Function als Folge stetiger Functionen darstellen läſst oder nicht (Cap. 7). Dies ist der Gesichtspunkt, von dem aus Baire auf die Frage geführt wurde. Der Erfolg seiner Untersuchung beruht durchaus auf der Ausdehnung des Stetigkeitsbegriffes auf beliebige nirgends dichte Mengen.

Es sei $f(x, y, \cdots) = f(p)$ eine in einem Bereich H definirte punktweise unstetige Function und K die Menge der Unstetigkeitspunkte $\omega \geq k$. Diese Menge ist dann notwendig nirgends dicht in H. Es kann nun vorkommen, daſs die Menge K einen perfecten Bestandteil K^Ω enthält. Ist dies der Fall, so betrachten wir jetzt die Function $F(p)$ nur bezüglich der perfecten Menge K^Ω. Alsdann sind an sich wieder drei Fälle möglich; es kann $F(p)$ bezüglich K^Ω

1) a. a. O., S. 25.
2) a. a. O., S. 46 ff.

stetig, total unstetig oder punktweise unstetig sein. Ist $F(p)$ bezüglich K^Ω nicht stetig, so sei K_1 die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq k$ bezüglich K^Ω. Falls nun K_1 überall dicht bezüglich K^Ω ist, so ist K_1 mit K^Ω identisch; alsdann ist $F(p)$ in K total unstetig, und die Betrachtung hat ein Ende. Ist dagegen die Menge K_1 nicht überall dicht bezüglich K^Ω, so zerfällt H resp. K^Ω in eine endliche oder abzählbare Menge von Teilgebieten, so dafs in jedem von ihnen K_1 entweder überall dicht oder nirgends dicht ist. Es genügt demgemäfs, für das folgende anzunehmen, K_1 sei nirgends dicht bezüglich K^Ω. Enthält nun K_1 wieder einen perfecten Bestandteil K_1^Ω, so betrachte man $F(p)$ als Function in K_1^Ω; ist K_2 die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq k$ bezüglich K_1^Ω, so sind wieder nur die zwei Fälle zu berücksichtigen, dafs K_2 in K_1^Ω überall dicht, also mit K_1^Ω identisch ist, oder dafs K_2 nirgends dicht bezüglich K_1^Ω ist. Im letzten Fall kann K_2 wieder einen perfecten Bestandteil K_2^Ω enthalten, und man hat die Function bezüglich K_2^Ω ins Auge zu fassen. So kann man weitergehen, solange $F(p)$ Unstetigkeitspunkte bezüglich der nach und nach construirten perfecten Mengen $K^\Omega, K_1^\Omega, K_2^\Omega, \cdots$ besitzt und in Bezug auf keine von ihnen total unstetig ist. Nun ist aber die Menge K_1^Ω Teilmenge von K^Ω, ebenso ist K_2^Ω Teilmenge von K_1^Ω u. s. w., und daraus folgt, dafs sich unser Verfahren so weit fortsetzen läfst, als die Construction von Teilmengen dieser Art ausgeführt werden kann. Diese Frage ist aber oben bereits erledigt. Wir sahen[1]), dafs diese Teilung zwar bis zu transfiniten Zahlen ausdehnbar ist, dafs aber die Teilmengen nur in abzählbarer Menge auftreten können. Es giebt also eine Reihe von Mengen

$$K^\Omega, K_1^\Omega, K_2^\Omega, \cdots K_\omega^\Omega, \cdots K_\alpha^\Omega, \cdots K_\beta^\Omega,$$

die mit einer bestimmten transfiniten Zahl β notwendig ein Ende erreicht, und zwar in dem Sinne, dafs die Function in K_β^Ω entweder stetig oder total unstetig ist, oder aber so punktweise unstetig, dafs die Punkte $\omega \geqq k$ eine endliche oder abzählbare Menge bilden. Was übrigens die Mengen

$$K, K_1, K_2, \cdots K_\omega, \cdots K_\alpha, \cdots K_\beta$$

selbst anbetrifft, so kann jede von ihnen eine abgeschlossene Menge allgemeinster Art sein, und im allgemeinen enthält also K_α aufser K_α^Ω noch eine abzählbare Menge, wie wir dies früher allgemein erörtert haben (S. 78).

Verbinden wir dieses Resultat mit der oben angeführten Bemerkung, dafs H resp. K^Ω in eine endliche oder abzählbare Menge von Gebieten zerfallen, so dafs in jedem von ihnen K_1 überall dicht

1) Vgl. S. 80 dieses Berichts.

oder nirgends dicht bezüglich K^{Ω} ist, und beachten, daſs dies analog für jede Menge K_{α} der Fall sein kann, so erhalten wir schlieſslich folgendes Resultat:

XII. Ist $F(p)$ eine in H punktweise unstetige Function, und ist K die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq k$, so zerfällt H in eine endliche oder abzählbare Menge von Teilgebieten, so daſs in jedem eine perfecte Menge existirt, die Teilmenge von K ist, und bezüglich deren die Function $F(p)$ stetig oder total unstetig ist oder nur eine endliche resp. abzählbare Menge von Unstetigkeitspunkten $\omega \geqq k$ enthält.

Drittes Capitel.

Die Ableitungen der monotonen Functionen.

Die Frage nach den Ableitungen einer reellen Function soll hier nur insoweit zur Erörterung gelangen, als sie durch die Theorie der Punktmengen gefördert worden ist[1]). Ich muſs daher naturgemäſs darauf verzichten, über den reichen Inhalt des Dini'schen Werkes über reelle Functionen einer Variablen ausführlicher berichten zu wollen. Die Analyse der inneren Eigenschaften einer Function, die erforderlich sind, damit in gewissen Punkten eine bestimmte beiderseitige oder einseitige Ableitung existirt oder fehlen kann, insbesondere die Frage, welcher Art alsdann die Ableitungswerte in den Nachbarpunkten sind, findet sich dort der Sache nach eingehend

1) Historisch bemerke ich ganz kurz das folgende: Bekanntlich gab Riemann das erste Beispiel einer stetigen Function, die nicht überall Ableitungen besitzt; während Hankel mittelst der Verdichtung der Singularitäten die erste allgemeine Methode zur Herstellung solcher Functionen erdachte. (Vgl. auch Cap. 7.) Darboux gab alsbald eine geometrische Analyse dieser Methode. Auch die Ableitung der Sätze über Reihenconvergenz, die der Hankel'schen Methode als Grundlage dienen, hat Darboux in exacter Form zuerst geliefert; er ist wohl auch derjenige, der zuerst darauf hinwies, daſs die Integrale der punktweise unstetigen Functionen ebenfalls stetige Functionen liefern, die nicht überall eine Ableitung besitzen. (Vgl. Cap. 6.) Das erste Beispiel einer nirgends differenzirbaren Function stammt bekanntlich von Weierstraſs. Auch Darboux hat bald darauf ein Beispiel dieser Art construirt; er gab auch schon früh ein Beispiel einer stetigen Function, deren Ableitung eine punktweise unstetige Function ist, und zwar eine solche, die an allen rationalen Stellen einen Sprung hat, Ann. de l'Ec. norm. (2) Bd. 4, S. 109. Eine allgemeine Methode zur Darstellung nirgends differenzirbarer Functionen gab alsbald Dini, Ann. di Mat. (2) 8, 121. Eine in jedem Intervall nicht differenzirbare Function hat frühzeitig auch H. A. Schwarz gegeben. Vgl. Ges. Abh. II, S. 269, sowie auch J. Thomae, Einleitung, S. 26. An Weierstraſs anschlieſsende Beispiele gab insbesondere M. Lerch, z. B. Journ. f. Math. 103, S. 126. Vgl. endlich auch Cellérier, Bull. des Sc. math. 14, S. 152.

erörtert, wenn auch in der formalen Aussage der einzelnen Sätze die Mengenbegriffe nicht zur Anwendung kommen.

Überhaupt sind wir über das Werk Dini's kaum erheblich hinausgekommen. Die Untersuchung der Gesetze, denen die Ableitungen in den einzelnen Punkten unterworfen sind, ist deshalb subtiler und schwieriger, weil man es hier nicht mit abgeschlossenen Mengen zu thun hat; darauf beruht es auch, dafs die meisten Resultate, von denen hier zu berichten ist, von abschliefsender Tragweite nicht sind. Sätze allgemeinerer Art sind nur zwei zu erwähnen; der eine geht auf König zurück, der andere auf Brodén; beide beziehen sich auf Functionen, deren Ableitungen an einer überall dichten Menge unendlich sind. Im übrigen beziehen sich die zu erwähnenden neuerlich gefundenen Resultate auf specielle Functionen oder Functionsklassen.

Betrachtungen über gesetzmäfsige Verteilung von Besonderheiten, die die zweiten und höheren Ableitungen betreffen, liegen bislang nur wenige vor. Im wesentlichen hat sich nur Harnack näher mit ihnen beschäftigt[1]). Was von seinen Resultaten hier anzuführen wäre, ist höchstens der evidente Satz, dafs die Stellen, an denen ein zweiter oder höherer Differentialquotient bestimmten oder unbestimmten Zeichens existirt, nicht isolirt sein können und daher immer eine in sich dichte Menge bilden.

Unter den stetigen Functionen einer reellen Variablen pflegt man drei Hauptklassen zu unterscheiden: die Function kann im Intervalle $a \cdots b$ monoton[2]) und nirgends constant sein, sie kann in ihm unendlich oft oscilliren, also unendlich viele Maxima und Minima besitzen, sie kann schliefslich unendlich viele Invariabilitätszüge oder Constanzintervalle aufweisen. Es ist weiter klar, dafs wenn eine Function $f(x)$ keiner dieser Hauptklassen angehört, das Intervall $a \cdots b$ so in eine höchstens abzählbare Menge von Teilintervallen zerfällt, dafs die Function in jedem Teilintervall einer der drei genannten Kategorien entspricht. Freilich ist diese Einteilung nur eine formale; sie ruht nicht auf inneren charakteristischen Unterschieden. Man verdankt Dini die Einsicht, dafs eine monotone nirgends constante Function durch Subtraction einer Linearfunction $\mu x + \nu$ in eine unendlich oft oscillirende Function übergehen kann, und das gleiche gilt von jeder Function mit unendlich vielen Constanzintervallen. Demzufolge ist es schliefslich nur die zweite

1) Math. Ann: 23, S. 264. Bezüglich der Arbeiten Harnack's in Math. Ann. 19 u. 23 ist zu bemerken, dafs sie nicht in allen Teilen correct sind, und dafs Harnack in Math. Ann. 24 einen Teil von ihnen selbst richtiggestellt hat. In diesen Arbeiten finden sich übrigens auch analoge Betrachtungen über den mittleren Differentialquotienten.

2) Monoton bedeutet, wie üblich, niemals wachsend oder niemals abnehmend. Vgl. auch S. 121 dieses Berichts.

unserer Functionsklassen, die für das durchaus unregelmäfsige Verhalten der Ableitungen eine ursächliche Bedeutung hat.

Praktisch ist es natürlich zweckmäfsig, die drei Functionsklassen gesondert zu behandeln, zumal für ihre Structur durchaus verschiedene Bildungsgesetze und Formeln mafsgebend sind. Ich beschränke mich zunächst auf die erste Klasse, die ich kurz als monoton bezeichnen will. Die allgemeine Aufgabe, die man sich hier gestellt hat, geht dahin, die innere Structur der Function so zu beeinflussen, dafs an Mengen bestimmter Art, sei es abzählbaren, sei es nicht abzählbaren, ein vorgegebenes Verhalten der Function bezüglich ihrer Ableitungen eintritt. Dabei wird die Function immer zunächst nur für eine überall dichte Menge U definirt, und dann in der oben angegebenen Weise auf die Gesamtmenge erweitert. Mit Aufgaben dieser Art hat sich insbesondere T. Brodén eingehend beschäftigt. Der Erfolg seiner Methode besteht besonders darin, dafs die Punkte von U_g eine beinahe erstaunliche Fülle von Klassen der merkwürdigsten Typen liefern, und dafs sich unter ihnen Punktklassen beliebig unregelmäfsigen Verhaltens im allgemeinen immer finden lassen.

1. Ich setze zunächst die auf du Bois-Reymond zurückgehende Definition des allgemeineren Ableitungsbegriffes hierher, die auf beliebige Functionen Bezug nimmt, im folgenden jedoch nur für stetige Functionen in Betracht gezogen wird. Ist $y = f(x)$ eine im Intervall $a \cdots b$ stetige Function, x ein beliebiger, aber fester Punkt dieses Intervalls und δ ein in x beginnendes Teilintervall, so hat der Differenzenquotient

$$q(x_1, x) = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

für alle Werte x_1 des Intervalls δ eine obere Grenze g resp. eine untere Grenze k. Sind jetzt

$$\delta_r,\ \delta_r',\ \delta_r'',\ \cdots;\ \delta_l,\ \delta_l',\ \delta_l'',\ \cdots$$

Intervalle, die von rechts resp. links gegen x convergiren, und sind

$$g_r,\ g_r',\ g_r'',\ \cdots,\ \text{resp. } g_l,\ g_l',\ g_l'',\ \cdots$$

die zugehörigen Werte von g, so convergiren diese Werte gegen je einen (unteren) Grenzwert γ_r und γ_l, und ebenso convergiren die zugehörigen Werte von k, nämlich

$$k_r,\ k_r',\ k_r'',\ \cdots,\ \text{resp. } k_l,\ k_l',\ k_l'',\ \cdots$$

gegen je einen (oberen) Grenzwert $\varkappa_r$ und $\varkappa_l$. Diese vier Gröfsen, die für jede Function $f(x)$ existiren, sind von du Bois[1]) unter dem

1) Antrittsprogramm Freiburg, S. 3. Der Begriff der Unbestimmtheitsgrenzen ist freilich allgemeiner.

Namen der Unbestimmtheitsgrenzen eingeführt worden. Später haben sie von Scheeffer[1]) den zweckmäſsigeren Namen der vier Ableitungen erhalten, und zwar heiſsen γ_l und $\varkappa_l$ hintere obere resp. untere Ableitung, dagegen γ_r und $\varkappa_r$ vordere obere resp. untere Ableitung. Im Anschluſs an Scheeffer bezeichne ich die beiden vorderen Ableitungen durch $D^+f(x)$ resp. $D_+f(x)$, ebenso die beiden hinteren Ableitungen durch $D^-f(x)$ resp. $D_-f(x)$. Ist $\gamma_l = \varkappa_l$, so existirt eine linke Ableitung $f'_-(x)$; ist $\gamma_r = \varkappa_r$, eine rechte Ableitung $f'_+(x)$; sind endlich $\gamma_l = \varkappa_l = \gamma_r = \varkappa_r$, so hat $f(x)$ im Punkte x eine einzige bestimmte Ableitung $f'(x)$. Ich werde im folgenden eine in $a \cdots b$ überall dichte Menge wie früher durch $X = \{x_N\}$ bezeichnen (S. 79) und $C = X + X_g$ setzen, so daſs X_g die Complementärmenge von X bezüglich $a \cdots b$ ist.

Die vorstehenden Definitionen setzen nicht voraus, daſs der Bereich der Variablen x ein continuirlicher ist. Aus den oben S. 116 angegebenen Gründen lassen auch sie sich auf jede unendliche Menge P ausdehnen, insbesondere aber wieder auf perfecte und nirgends dichte Mengen T. Für eine Function $f(x)$, die für eine solche Menge T definirt ist, giebt es dann in jedem Punkt von T_l resp. T_r nur hintere resp. vordere Ableitungen; in jedem Punkt von T_g hingegen sind alle vier Ableitungen begrifflich vorhanden Mit dem Begriff der Ableitung lassen sich auch die im folgenden abzuleitenden Sätze, bei deren Erörterung ich mich im Interesse der Darstellung wieder auf Functionen einer stetigen Variablen beschränke, auf Functionen übertragen, die für nirgends dichte Mengen definirt sind. Für einige dieser Sätze hat dies kürzlich R. Baire sehr eingehend ausgeführt[2]).

2. Man kann die Functionen $f(x)$ zunächst danach scheiden, ob ihre rechtsseitigen und linksseitigen Ableitungen eine stetige, punktweise unstetige oder total unstetige Function bilden. Wird von der allgemeinen Stetigkeit abgesehen, so ist der einfachste Fall der, daſs die bezügliche Ableitung von $f(x)$ eine punktweise unstetige Function darstellt. Solche Functionen werden einerseits durch die Integrale von punktweise unstetigen Functionen geliefert, wie zuerst Darboux bemerkt zu haben scheint. Man hat aber auch eine Reihe von Beispielen solcher Functionen direct construirt, insbesondere solche, bei denen die Ableitung eine überall einwertige oder zweiwertige Function in dem oben genannten Sinn darstellt[3]).

Von Resultaten allgemeinerer Art, die hierher gehören, erwähne ich folgende Sätze von Dini resp. Baire:

---

1) Acta math. 5, S. 52.

2) Ann. di mat. (3) 3, S. 113 ff.

3) Hierher gehört eine Reihe von Functionen, die durch Verdichtung der Singularitäten entstehen; vgl. z. B. Dini, Grundlagen, S. 157 ff. Vgl. ferner die Anm. auf S. 144 dieses Berichts.

I. Für eine stetige monotone Function, die sich nicht durch Subtraction einer Linearfunction $\mu x + \nu$ in eine unendlich oft oscillirende Function verwandeln läfst, existirt sowohl die linke, wie die rechte Ableitung und bildet eine stetige oder eine solche punktweise unstetige Function, die überall höchstens zweiwertig ist[1]).

II. Wenn die Function $f(x)$ im Intervall $a \cdots b$ überall eine bestimmte Ableitung $f'(x)$ besitzt, so ist $f'(x)$ eine höchstens punktweise unstetige Function[2]).

Es sind ferner zwei Sätze zu erwähnen, die sich auf Functionen mit total unstetigen Ableitungen beziehen und folgendermafsen lauten:

III. Wenn für die stetige Function $f(x)$ im Intervall $a \cdots b$ an einer überall dichten Menge eine unendliche Ableitung unbestimmten Zeichens existirt, so giebt es eine überall dichte Menge dieses Intervalls, so dafs die Ableitung in den Punkten, in denen sie bestimmt ist, den beliebigen Wert c hat, und in den Punkten, wo die Derivirten verschieden sind, c zwischen ihnen enthalten ist.

IV. Wenn für die stetige Function $f(x)$ an einer überall dichten Menge M eine der Derivirten positiv oder negativ unendlich grofs ist, so giebt es stets eine Menge zweiter Kategorie der gleichen Eigenschaft.

Jede Function, die den Bedingungen dieser Sätze entspricht, ist eine überall oscillirende Function. Ich verschiebe daher den Beweis des ersten Satzes, der von König stammt[3]), auf das nächste Capitel.

Um den zweiten, von Brodén gegebenen, Satz[4]) zu beweisen, denken wir uns die Function $f(x)$ wieder durch ihre Werte an einer überall dichten Menge $X = \{x_N\}$ bestimmt und nehmen insbesondere an, dafs die Punkte der Menge $X = \{x_N\}$ zugleich der Menge M angehören. Ist in x_N insbesondere die vordere Ableitung unendlich, so läfst sich ein gröfstes Intervall $x_N \cdots x' = s'$ finden, so dafs, falls g beliebig angenommen wird,

$$| f(x_N) - f(x') | = gs'$$

ist. Nimmt man also eine Reihe ins unendliche wachsender Gröfsen $g_1 < g_2 < \cdots < g_\nu < \cdots$ beliebig an, so giebt es auch ein gröfstes Intervall $x_N \cdots x'' = s''$, so dafs

$$| f(x'') - f(x_N) | = g_1 s''$$

---

1) Grundlagen etc., S. 291. Den Beweis findet man ebenda.

2) Ann. di mat. (3) 3, S. 108. Für den Beweis vgl. Cap. 6.

3) Monatsh. f. Math. u. Phys. 1, S. 7.

4) Acta Univ. Lund. 8, S. 31. Für ein specielles Beispiel hat Brodén diesen Satz auch in Öfvers. af Vet. Akad. Förhandl. Stockholm 1896, Nr. 8 bewiesen. Er beweist übrigens nur, dafs $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$ ist.

ist, u. s. w. Zu der behaupteten Menge M zweiter Kategorie gelangen wir nun folgendermaſsen: Da zu jedem Punkt x_N für gegebenes g ein bestimmtes Intervall s gehört, so bestimmt die Gesamtheit dieser Intervalle eine Borel'sche Menge[1]) G solcher Punkte, die nicht innere Punkte eines Intervalles s sind (S. 110), während jeder Punkt der Complementärmenge von G innerer Punkt mindestens eines solchen Intervalles ist. Gehören nun zu $g_1, g_2, \cdots g_\nu, \cdots$ die Mengen

$$G_1, G_2, \cdots G_\nu, \cdots,$$

so bilden sie eine Menge erster Kategorie $\{G_\nu\}$, deren Complementärmenge die Menge M ist. Jeder Punkt dieser Menge M ist nämlich innerer Punkt mindestens eines Intervalles

$$s', s'', \cdots\cdot s^{(\nu)}, \cdots\cdot,$$

und daraus folgt leicht, daſs in ihm nicht beide vorderen und beide hinteren Ableitungen endlich sein können.

3. Da jede im Intervall $a \cdots b$ stetige Function durch ihre Werte an der Menge $X = \{x^N\}$ bestimmt ist, so könnte man jeden möglichen Typus stetiger Functionen dadurch erhalten, daſs bei festgehaltener Menge X die zu den Punkten x_N zugehörigen Functionswerte auf alle zulässigen Arten vorgeschrieben werden. Natürlich wird eine so gewählte Menge X für das Studium jeder einzelnen Function oder Functionsklasse nicht in gleicher Weise geeignet sein; für die hier vorliegenden Betrachtungen ist aber die allgemeine Wahl von $X = \{x_N\}$ durchaus zweckmäſsig. Man denke sich überdies jede der beiden Variablen x und y auf einer beliebigen Geraden dargestellt, und es möge dem Intervall $a \cdots b = s$, in dem sich x bewegt, das Intervall $c \cdots d = t$ als Ort von y entsprechen, und der Menge $X = \{x_N\}$ entspreche die Menge $Y = \{y_N\}$. Diese Mengen bestimmen wir jetzt näher durch folgende Formeln. Gemäſs den früheren Bezeichnungen (S. 79) zerfalle $s = a \cdots b$ durch den Punkt x in die Intervalle $s_0 = a \cdots x$ und $s_1 = x \cdots b$ und werde gesetzt

$$s_0 = \frac{s}{2}(1 + e), \; s_1 = \frac{s}{2}(1 - e).$$

Ferner ist x_0 ein Punkt innerhalb s_0 und x_1 ein Punkt innerhalb s_1, so daſs s_0 in s_{00} und s_{01}, ebenso s_1 in s_{10} und s_{11} zerfällt, und wir setzen

$$s_{00} = \frac{s_0}{2}(1 + e_0), \; s_{01} = \frac{s_0}{2}(1 - e_0)$$

$$s_{10} = \frac{s_1}{2}(1 + e_1), \; s_{11} = \frac{s_1}{2}(1 - e_1).$$

1) Dieser Menge braucht zunächst kein Punkt anzugehören; mit wachsendem g müssen aber Mengen dieser Art auftreten.

Ist allgemein s_N eines der 2^ν Intervalle mit ν Indices, so ist x_N ein Punkt im Innern dieses Intervalls, der s_N in $s_{N,0}$ und $s_{N,1}$ zerlegt, und es sei

$$(1) \qquad s_{N,0} = \tfrac{1}{2} s_N (1 + e_N), \qquad s_{N,1} = \tfrac{1}{2} s_N (1 - e_N).$$

Alsdann ergiebt sich allgemein für s_N der Wert

$$(2) \qquad s_N = \frac{s}{2^\nu}(1 \pm e)(1 \pm e_i) \cdots (1 \pm e_{N-1}) = \frac{s}{2^\nu} E_N,$$

wo $N - 1$ eine Gruppe von $\nu - 1$ Indices bedeutet, die Indices $i, k, l, \cdots$ der rechten Seite mit denen übereinstimmen, die in N enthalten sind, und die Vorzeichen von den Indices gemäfs Gl. (1) so abhängen, dafs jeder Index 0 ein positives und jeder Index 1 ein negatives Zeichen bewirkt. Dabei sind überdies alle $|e_N| < 1$, die e_N selbst können aber beliebig positiv oder negativ sein.

Analog construiren wir die Menge $Y = \{y_N\}$ und die zugehörigen Intervalle t_N. Für sie mögen folgende Formeln bestehen. Es sei

$$(3) \qquad t_{N,0} = \tfrac{1}{2} t_N (1 + f_N), \qquad t_{N,1} = \tfrac{1}{2} t_N (1 - f_N),$$

wo f_N ebenfalls positiv oder negativ sein kann und $|f_N| < 1$ ist. Ferner wird

$$(4) \qquad t_N = \frac{t}{2^\nu}(1 \pm f)(1 \pm f_i) \cdots (1 \pm f_{N-1}) = \frac{t}{2^\nu} F_N,$$

wo für Indices und Vorzeichen die nämlichen Regeln gelten wie oben. Die für die e_N und f_N angegebene Wertbeschränkung ist nun noch dahin zu erweitern, dafs die Punktmengen $X = \{x_N\}$ und $Y = \{y_N\}$ überall dicht werden, was erfordert, dafs die beiden Producte

$$\frac{1}{2^\nu} E_N \text{ und } \frac{1}{2^\nu} F_N$$

für jede Indicesfolge $i, k, l, \cdots$ mit wachsendem ν gegen Null convergiren. Es können also E_N und F_N selbst mit wachsendem ν eventuell auch unendlich werden.

Falls mit wachsendem ν für jede Indicesfolge $i, k, l, \cdots$ $\lim s_N = 0$ und zugleich $\lim t_N = 0$ ist, so ist y eine für die Menge $X = \{x_N\}$ gleichmäfsig stetige Function und kann daher zu einer auf $a \cdots b$ stetigen Function erweitert werden. Dies geschieht hier besonders so, dafs für jede bestimmte Indicesfolge die Intervalle

$$(5) \qquad s_i, \; s_{ik}, \; s_{ikl}, \cdots s_N, \; s_{N,i}, \cdots$$

einen Punkt x von $a \cdots b$ als den gemeinsamen Grenzpunkt ihrer Endpunkte bestimmen, und analog die entsprechenden Intervalle

$$(6) \qquad t_i, \; t_{ik}, \; t_{ikl}, \cdots t_N, \; t_{N,i}, \cdots,$$

deren Indices mit den obenstehenden übereinstimmen, den zugehörigen Punkt von $c \cdots d$ als den entsprechenden Functionswert y. Sind von einem bestimmten Index an alle folgenden Indices gleich 0 oder 1, so liefert die Folge (1) insbesondere einen Punkt von X selbst, sonst aber einen Punkt von X_g, und das gleiche gilt für die entsprechende Folge (6)[1].

Seien nun x_l und x_r resp. y_l und y_r irgend zwei Paare entsprechender Werte, so lassen sich die Intervalle $s' = x_l \cdots x_r$ und $t' = y_l \cdots y_r$ wie folgt bestimmen (Fig. 3). Wir denken uns dazu wieder die Menge $X = \{x_N\}$ in die Anordnung

Fig. 3.

$$x,\ (x_i),\ (x_{ik}),\ \cdots\ (x_N),\ \cdots$$

gesetzt, so dafs (x_N) die sämtlichen Punkte mit ν Indices darstellt. Ist dann der erste Punkt der so geordneten Menge, der in das Intervall s' fällt, ein Punkt x_N mit ν Indices, so ist zunächst klar, dafs es nur einen solchen Punkt giebt. Es giebt dann wieder einen ersten Punkt $x_{N'}$ obiger Menge mit ν' Indices, der dem Intervall $x_N \cdots x_r$ angehört, ebenso im Intervall $x_{N'} \cdots x_r$ einen ersten Punkt $x_{N''}$ mit ν'' Indices, so dafs die Punkte

$$x_N,\ x_{N'},\ x_{N''},\ \cdots$$

unbeschränkt gegen x_r convergiren, und ebenso erhalten wir im Intervall $x_l \cdots x_N$ eine analog definirte Punktfolge

$$x_{M'},\ x_{M''},\ x_{M'''},\ \cdots,$$

die gegen x_l convergirt. Diese Folgen sind endlich oder unendlich, je nachdem x_l resp. x_r der Menge X angehört oder nicht. Nun ist nach den obigen Bezeichnungen $x_N \cdots x_{N'}$ ein Intervall $s_{N',0}$, ebenso $x_{N'} \cdots x_{N''}$ ein Intervall $s_{N'',0}$, dagegen $x_{M'} \cdots x_N$ ein Intervall $s_{M',1}$ u. s. w. Wir erhalten also, wenn noch das Intervall $x_M \cdots x_N = s_{MN}$ gesetzt wird,

$$s_{MN} = \Sigma s_{N',0} + \Sigma s_{M',1},$$

wo die Summen sich über alle Gruppen $N', N'', \cdots$ resp. $M', M'', \cdots$ erstrecken. Die nämliche Formel gilt aber nun für das entsprechende Intervall t'; es wird

$$t_{MN} = \Sigma t_{N',0} + \Sigma t_{M',1}.$$

Diese Formeln gelten ganz allgemein, aus ihnen folgt noch

$$m_{MN} = \frac{t_{MN}}{s_{MN}} = \frac{\Sigma t_{N',0} + \Sigma t_{M',1}}{\Sigma s_{N',0} + \Sigma s_{M',1}},$$

1) Fafst man das von den Punkten (x, y) bestimmte analytische Curvenbild ins Auge, so bestimmen die Punkte (x_N, y_N) für gegebenes ν je einen Polygonzug, der mit wachsendem ν in die Curve übergeht.

und dieser Quotient ist es, dessen Grenzwert oder Grenzwerte für die Bestimmung der Ableitungen in Frage kommen. Bei der grofsen Unbestimmtheit dieses Quotienten dürfte es kaum möglich sein, von ihm aus zu Resultaten allgemeinerer Natur zu gelangen, und demgemäfs hat sich auch Brodén darauf beschränkt, das Verhalten der Functionen bei gewissen einfachen Bildungsgesetzen zu discutiren[1]. Er nimmt an, dafs alle f_N, die die nämliche Zahl von Indices enthalten, einander gleich sind, und ebenso alle e_N, und dafs, falls noch $f_N = f_\nu$ und $e_N = e_\nu$ gesetzt wird, $f_\nu - e_\nu > 0$ ist. Diese letzte Bedingung hat eine einfache geometrische Bedeutung; sie besagt, dafs der Curvenpunkt (x_N, y_N), der dem Wert x_N entspricht, immer je auf derselben Seite der Verbindungslinie derjenigen beiden Curvenpunkte liegt, die den Endpunkten des Intervalls s_N entsprechen. Selbst für den hier beschriebenen einfachsten Fall ist die Zahl der möglichen Functionsbestimmungen noch äufserordentlich mannigfacher Natur.

Zur Abkürzung setzen wir noch

$$\frac{t_N}{s_N} = m_N, \quad \frac{t_{N,0}}{s_{N,0}} = m_{N,0}, \quad \frac{t_{N,1}}{s_{N,1}} = m_{N,1},$$

so wird jetzt, gemäfs den S. 150 abgeleiteten Formeln (1) und (3)

$$m_{N,0} = m_N \frac{1 + f_\nu}{1 + e_\nu}; \quad m_{N,1} = m_N \frac{1 - f_\nu}{1 - e_\nu}.$$

Man setze nun noch

$$\frac{1 + f_\nu}{1 + e_\nu} = 1 + u_\nu, \quad \frac{1 - f_\nu}{1 - e_\nu} = 1 - v_\nu,$$

so dafs

$$u_\nu = \frac{f_\nu - e_\nu}{1 + e_\nu}, \quad v_\nu = \frac{f_\nu - e_\nu}{1 - e_\nu}$$

ist, also u_ν und v_ν beide positiv sind. Alsdann hängen die Werte der Quotienten $m_{N,0}$ und $m_{N,1}$ von dem Verhalten der unendlichen Producte

$$U = \Pi(1 + u_\nu), \quad V = \Pi(1 - v_\nu)$$

ab, und es läfst sich, je nachdem deren Werte endlich und von Null verschieden sind oder gegen Null resp. Unendlich convergiren, ein mannigfaches Verhalten der Ableitungen in den Punkten von X resp. X_g erreichen. Es kann sich hier nur darum handeln, an einem

1) Hierfür leistet der Hilfssatz noch gute Dienste, dafs man sich auf solche Punkte als Endpunkte der Intervalle s' beschränken kann, die der Punktmenge $\{x_N\}$ angehören (vgl. Journ. f. Math. 118, S. 6). Man vgl. auch eine Abhandlung Brodén's über Grenzwerte von Summenquotienten, Bih. Svensk. Vet. Akad. Handl. 23, 1, Nr. 2 (1897).

Beispiel die Art der Brodén'schen Überlegungen zu kennzeichnen; ich beschränke mich auf den Fall, dafs U endlich ist, aber $V = 0$. Dies liefert für u_ν und v_ν die folgenden mit einander verträglichen Bedingungen, dafs $\lim u_\nu = 0$, $\lim v_\nu = 0$ ist und überdies Σu_ν convergire, Σv_ν und $\Sigma(u_\nu : v_\nu)$ divergire, doch so, dafs $\lim (u_\nu : v_\nu) = 0$ ist[1]).

Handelt es sich nun zunächst um die Ableitungen in einem Punkt x_N von X, so vereinfacht sich der obige Quotient m_{MN} sehr wesentlich; für die vordere, resp. hintere Ableitung kommen ersichtlicherweise nur die Grenzwerte der beiden leichter zu beurteilenden Quotienten

$$m_N^+ = \frac{\Sigma t_{N',0}}{\Sigma s_{N',0}} \quad \text{resp.} \quad m_N^- = \frac{\Sigma t_{M',1}}{\Sigma s_{M',1}}$$

in Betracht. Nun ist im vorliegenden Fall

$$t_{N,0} = m_N(1 + u_\nu)\, s_{N,0}, \quad t_{N,1} = m_N(1 - v_\nu)\, s_{N,1},$$

und daraus ergeben sich mit Rücksicht auf die über U und V gemachten Annahmen folgende Resultate. Da U endlich und von Null verschieden ist, so wird auch m_N^+ gegen einen bestimmten endlichen und von Null verschiedenen Grenzwert convergiren; und hieraus läfst sich folgern, dafs für x_N eine vordere Ableitung $f'_+(x_N)$ existirt, die endlich und nicht Null ist. Da andererseits $V = 0$ ist, so convergirt auch m_N^- gegen Null, und es existirt in x_N eine hintere Ableitung $f'_-(x_N)$, die den Wert Null hat.

An den Punkten von X_g hingegen sind sehr mannigfache Ableitungswerte möglich. In diesem Falle knüpfen wir an den Wert von m_N direct an. Ist x ein Punkt von X_g, so wechseln die Werte der in (5) und (6) eingehenden Indices $i, k, l, \cdots$ unaufhörlich ab, und man kann das Gesetz dieser Indiceswerte so bestimmen, dafs für die Ableitungen ein sehr verschiedenes Verhalten eintritt. Hierauf beruht die bereits oben erwähnte Möglichkeit, Punktklassen in der Menge X_g so zu finden, dafs sie vorgegebene Unregelmäfsigkeiten besitzen. Es genügt hier, den zur Indicesfolge $i, k, l, \cdots$ gehörigen Quotienten m_{N_ν} resp. seinen Grenzwert ins Auge zu fassen. Man hat

$$(7) \qquad m_N = \frac{t}{s} \cdot \frac{1 \pm f}{1 \pm e} \cdot \frac{1 \pm f_1}{1 \pm e_1} \cdots \frac{1 \pm f_\nu}{1 \pm e_\nu},$$

wo die Vorzeichen davon abhängen, ob die bezüglichen Indices den Wert Null oder Eins haben. Falls also die Zahl dieser Indices unbegrenzt wächst, so werden in dem Wert von m_N Factoren von U

---

1) Ein Beispiel hierfür bilden folgende Werte (a. a. O., S. 29):

$$u_\nu = \frac{1}{(\nu + 2)^2}, \quad v_\nu = \frac{\nu + 1}{(\nu + 2)^2}.$$

und Factoren von V ebenfalls in unbegrenzter Folge enthalten sein, und der Grenzwert von m_N hängt offenbar von der Art ab, in der diese Factoren aufeinanderfolgen. Man kann insbesondere diejenigen Factoren, die aus dem Product V stammen, so wählen, dafs sie ein von Null verschiedenes Product darstellen, andererseits aber auch so, dafs sie ein Product vom Wert Null bilden.

Um dies in aller Form darzuthun, verfährt man folgendermafsen: Wird

$$\log(1 - v_\nu) = - l_\nu$$

gesetzt, so ist Σl_ν eine divergente Reihe mit der Eigenschaft $\lim l_\nu = 0$. Ist nun α ein beliebiger positiver echter Bruch, so kann man wegen $\lim l_\nu = 0$ eine unendliche Teilreihe

$$l' = l_{\nu_1},\ l'' = l_{\nu_2},\ \cdots\ l^{(\varrho)} = l_{\nu_\varrho}$$

so bestimmen, dafs

$$l'' < \alpha l',\ l''' < \alpha l'',\ \cdots\ l^{(\nu+1)} < \alpha l^{(\nu)}\ \cdots$$

ist, und es wird $\Sigma l^{(\varrho)}$ eine convergente Reihe sein. Wird jetzt andererseits festgesetzt, dafs in der Reihe (5) nur diejenigen Indices den Wert 1 haben, die den Stellenzahlen

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ \cdots\ \nu_\varrho,\ \cdots$$

entsprechen, so wird der Grenzwert von m_N endlich und von Null verschieden sein; dagegen ist er Null, falls die bezügliche in ihn eingehende Teilmenge von Factoren von V einer divergenten Teilreihe von Σl_ν entspricht. Brodén zeigt nun, dafs, falls $\lim m_N = 0$ ist, eine bestimmte Ableitung $f'(x)$ existirt, die den Wert Null hat; ist dagegen $\lim m_N > 0$, so existirt zwar eine bestimmte vordere Ableitung, während eine bestimmte hintere Ableitung nicht vorhanden ist. Die Punkte, die jeder dieser beiden Klassen angehören, haben übrigens die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ und liegen überall dicht. Ist nämlich $\Sigma l^{(\varrho)}$ eine convergente Reihe, so ist auch jede unendliche Teilreihe davon eine convergente Reihe, und die Mächtigkeit dieser Teilreihen ist nach S. 9 u. 23 gleich $\mathfrak{c}$; und da die zu einer convergenten Teilreihe von Σl_ν gehörige Restreihe divergent ist, so haben auch die divergenten Teilreihen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$. Endlich ist auch klar, dafs beide Punktmengen überall dicht liegen, denn man kann die Werte einer beliebig grofsen Reihe von consecutiven Indices $i, k, l, \cdots$ willkürlich vorschreiben.

Eine noch gröfsere Teilung der Punkte x in Klassen verschiedener Structur tritt ein, falls $U = \infty$ und $V = 0$ ist. Man sieht leicht, dafs man in diesem Fall für die Art, wie bei den Indices $i, k, l, \cdots$ die Werte 0 und 1 der Reihe nach abwechseln, solche Gesetze vorschreiben kann, dafs m_N mit wachsendem ν nicht mehr gegen einen festen Grenzwert convergirt, sondern dauernd zwischen beliebig vor-

gegebenen Gröfsen schwankt. Für Punkte dieser Art stellen sich alsdann zwei verschiedene vordere Ableitungen sowie auch zwei verschiedene hintere Ableitungen ein. Noch mannigfaltigere Eigenschaften der Function $f(x)$ ergeben sich, falls die Producte U resp. V oscillirend angenommen werden, u. s. w. u. s. w. Wir schliefsen mit dem Satz:

V. Man kann die Structur einer stetigen monotonen Function mittelst der Formeln (1) und (3) auf die mannigfachste Weise so bestimmen, dafs ihre Ableitungen total unstetige Functionen darstellen.

Viertes Capitel.

Die unendlich oft oscillirenden und die streckenweise constanten resp. linearen Functionen.

Die unendlich oft resp. überall oscillirenden, sowie die streckenweise constanten oder linearen Functionen sind bisher nur beiläufig zur Erörterung gelangt, meist nur zu dem Zweck, um für sie eine Art Ausnahmestellung zu betonen. Sie sind es zumal, an denen die mannigfachen Sätze über das unregelmäfsige Verhalten der Ableitungswerte am greifbarsten und deutlichsten in die Erscheinung treten[1]). Da sie aber hierüber hinaus eine enge Beziehung zu wichtigen Fragen allgemeiner Tragweite besitzen, so scheinen sie mir eine selbständige Behandlung zu verdienen. Ich habe daher versucht, den hier vorliegenden Stoff von seinem zufälligen Charakter zu befreien und von den Einzelresultaten zu einer allgemeineren Untersuchungsrichtung zu gelangen.

Zu den überall oscillirenden Functionen gehört die gröfste Zahl der nirgends differenzirbaren Functionen, die bisher zur Kenntnis gelangt sind. Dies ist auch der Gesichtspunkt, von dem aus man diese Functionen bisher fast ausschliefslich betrachtet hat[2]). In neuester Zeit hat man begonnen, der Untersuchung dadurch eine allgemeinere Wendung zu geben, dafs man die Functionen bestimmten Zwecken gemäfs zu formen gesucht hat. Hiermit hat sich insbesondere Brodén unlängst beschäftigt; er bildet Functionen, die an gewissen Punktklassen Ableitungen besitzen. Formeln, die alle Functionen dieser Art umfassen, lassen sich leicht aufstellen (4); sie liefern zugleich Beispiele für die zuerst von Köpcke aufgefundene und höchst merkwürdige Klasse überall oscillirender Functionen, die in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung besitzen (5). Auch habe ich die allgemeinste Verteilung der Extrema einer unendlich oft

1) Man vgl. besonders Cap. 11 u. 12 der Grundlagen etc. von Dini.
2) Über die allgemeinen Eigenschaften dieser Functionen vgl. auch Dini, Grundlagen etc., S. 168ff.

oder auch überall oscillirenden Function zu bestimmen gesucht und teile sie hier mit (1). Sie liefert zugleich einen einfachen Beweis des König'schen Theorems (3).

Als streckenweise constant resp. linear bezeichne ich stetige Functionen, die in jedem Intervall einer überall dichten Menge $D = \{\delta\}$ constant resp. linear sind, ohne doch selbst constant oder linear zu sein (6). Diese Functionen sind allerdings schon häufiger in dem Buch Dini's und in den anschliefsenden Arbeiten erwähnt worden, aber doch immer nur sehr beiläufig. Was zumal die streckenweise constanten Functionen betrifft, so ist das durch sie gelieferte Functionsbild gar kein anderes, als dasjenige einer monotonen punktweise unstetigen Function, die nur eigentliche Sprünge besitzt, und für die also jede Menge K der Punkte $\omega \geq k$ endlich ist. Um den Übergang von der einen zur andern Auffassung zu vollziehen, hat man nur die unabhängigen Variablen zu vertauschen. Die Verschiedenheit der Auffassung dürfte aber für manche Fragen zweckmäfsig sein. So schwindet, um nur einen Punkt hervorzuheben, jede Besonderheit daran, dafs man in neuerer Zeit für die bezüglichen punktweise unstetigen Functionen eine Bogenlänge definirt hat; man hat es ja hier mit einem Begriff zu thun, der vom Coordinatensystem unabhängig ist und für die streckenweise constante Function als durchaus naturgemäfs erscheint. Die theoretische Bedeutung dieser Functionen liegt aber in ihrer Beziehung zum sogenannten Fundamentalsatz der Integralrechnung, worauf zuerst Harnack, Scheeffer, Hölder ziemlich gleichzeitig hingewiesen haben. Für diesen Satz spielen die Werte der Ableitungen in den Punkten der perfecten Menge T, die durch die Menge D bestimmt ist, und in zweiter Linie der Inhalt von D die entscheidende Rolle. Ich habe demgemäfs die Frage, wie beide Eigenschaften miteinander verknüpft sind, zu untersuchen begonnen (7) und teile die bezüglichen Resultate hier mit. Allerdings sind sie nicht von abschliefsender Tragweite, wie ja auch für die damit verwandte Frage nach der Geltung des obengenannten Fundamentalsatzes abschliefsende Resultate noch nicht vorliegen. Ich verweise hierfür auf das sechste Capitel.

Die vorstehend charakterisirten Functionsklassen lassen sich auf mehr als eine Variable ausdehnen und zeigen alsdann die analogen Eigenschaften (9).

Die Bedeutung der stetigen streckenweise linearen Functionen liegt in ihrem Zusammenhang mit der Theorie der trigonometrischen Reihen. Hier interessirt insbesondere die Frage, ob es Functionen dieser Art giebt, die in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung besitzen. Diese Frage ist, wie sich zeigen wird, zu bejahen (10). Übrigens kann die Theorie dieser Functionen als identisch mit der Theorie der für eine beliebige abgeschlossene Menge Q stetigen Functionen $f(x, Q)$ betrachtet werden.

1. Ist $x = \xi$ eine Stelle, an der die stetige Function $f(x)$ ein Maximum oder Minimum (Extremum) besitzt, so kann es einen gröfsten, durch die Punkte $\xi_l = \xi - \vartheta_l$ und $\xi_r = \xi + \vartheta_r$ begrenzten Bereich geben, so dafs für alle inneren Punkte x dieses Bereichs

$$f(x) < f(\xi) \quad \text{resp.} \quad f(x) > f(\xi)$$

ist. In diesem Fall soll ξ ein eigentliches Extremum heifsen. Das so bestimmte Intervall, dessen Länge $\vartheta_l + \vartheta_r = \vartheta$ beträgt, heifse der zu ξ gehörige Extrembereich. Falls ξ_l oder ξ_r nicht mit a resp. b zusammenfällt, ist zugleich

$$(1) \qquad f(\xi_l) = f(\xi) = f(\xi_r),$$

wie aus der Stetigkeit der Function unmittelbar folgt.

Falls ein Bereich ϑ der genannten Art nicht existirt, so existirt jedenfalls ein analoges Intervall $\xi_l \cdots \xi_r$ von der Art, dafs für jeden inneren Punkt x

$$(2) \qquad f(x) \leqq f(\xi) \quad \text{resp.} \quad f(x) \geqq f(\xi)$$

ist. Alsdann soll ξ ein uneigentliches Maximum oder Minimum (Extremum) heifsen; es giebt dann in jeder Nähe von ξ Punkte x, so dafs $f(x) = f(\xi)$ ist[1]). Auch in diesem Fall mufs, wenn ξ_l nicht mit a und ξ_r nicht mit b zusammenfällt, die Gl. (1) bestehen. Die beiden so definirten Punktklassen folgen einer wesentlich verschiedenen Gesetzmäfsigkeit. Die eigentlichen Extrema bilden, wie wir sofort zeigen werden, eine höchstens abzählbare Menge, während die uneigentlichen auch die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen können.

Sind nämlich ξ' und ξ'' zwei eigentliche Maxima, so ist zunächst klar, dafs nicht jeder innerhalb des dem andern zugehörigen Bereichs liegen kann; sonst müfste ja zugleich $f(\xi'') < f(\xi')$ und $f(\xi') < f(\xi'')$ sein. Nun sei wieder $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_\nu > \cdots$ eine Reihe unbegrenzt gegen Null abnehmender Zahlen, und es sei M_ν die Menge der Maximumspunkte, für die zugleich

$$\vartheta_l \geqq a_\nu \quad \text{und} \quad \vartheta_r \geqq a_\nu$$

ist, so mufs diese Menge endlich sein. Denn sonst hätte sie einen Grenzpunkt ξ, und welches auch der Wert von a_ν sein mag, so würde von je zwei Maximumspunkten ξ' und ξ'', deren Entfernung von ξ kleiner als $\frac{1}{2}a_\nu$ ist, jeder innerhalb des dem andern zugehörigen Maximumsbereiches liegen, was unmöglich ist. Ist nun M_ν endlich, so ist auch $M'_\nu = M_\nu - M_{\nu-1}$ endlich; und es bilden daher auch

$$M'_1,\ M'_2,\ \cdots M'_\nu,\ \cdots$$

---

1) Hier kann ξ_l oder ξ_r mit ξ zusammenfallen. Es kann übrigens auch für einen eigentlichen Maximumspunkt einen Bereich ϑ geben, in dem die Gl. (2) erfüllt ist.

eine abzählbare Menge. Andererseits mufs jeder Maximumspunkt notwendig einer dieser Mengen angehören. Dasselbe gilt für die Minima.

Der Beweis läfst sich ohne weiteres auf Functionen mehrerer reeller Veränderlichen übertragen. Es handelt sich nur darum, den Extrembereich ϑ für eine Stelle $(x, y \cdots)$ in geeigneter Weise zu definiren. Geschieht dies in der Weise, wie es für die Theorie der Punktmengen auf S. 81 dieses Berichts eingehend ausgeführt ist, so entspricht z. B. jeder Stelle (ξ, η) einer stetigen reellen Function $f(x, y)$, in der ein eigentliches Extremum stattfindet, ein rechteckiger Bereich ϑ, dessen Seiten vom Punkt (x, y) die Entfernungen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ besitzen mögen. Auch jetzt gilt, dafs (ξ, η) nicht innerhalb ϑ' und zugleich (ξ', η') innerhalb ϑ liegen kann, und dafs die Menge M_ν endlich ist, wenn M_ν so bestimmt ist, dafs jedes $\vartheta_i \geqq a_\nu$ ist für $i = 1, 2, 3, 4$, woraus der Satz folgt. D. h.

I. Die eigentlichen Maxima oder Minima einer stetigen nirgends constanten[1]) Function beliebig vieler reellen Variablen bilden eine endliche oder abzählbare Menge.

Liegen die Extrema überall dicht im Intervall $a \cdots b$, so werden, je dichter sich das Intervall mit den Punkten der Mengen M_ν bedeckt, die zugehörigen Bereiche ϑ immer kleiner und kleiner. Ist $\Xi = \{\xi\}$ die von ihnen gebildete Punktmenge, so ist ein Punkt ξ_g von Ξ_g kein Maximums- oder Minimumspunkt, obwohl er Häufungsstelle solcher Punkte ist; je näher die Punkte ξ an ihn heranrücken, um so kleiner werden die zugehörigen Bereiche ϑ[2]). Das analoge gilt für Functionen von mehreren Variablen.

2. Die uneigentlichen Extrema stellen nicht etwa den complicirteren, sondern vielmehr den trivialeren Fall dar.

Sei nämlich ξ ein uneigentlicher Maximumspunkt, und wieder ϑ der zugehörige Bereich; ferner sei $f(\xi) = h$. Es giebt dann innerhalb ϑ in jeder Nähe von ξ Punkte ξ', so dafs auch

$$f(\xi') = f(\xi) = h$$

ist, und demnach auch ξ' ein Maximumspunkt ist. Alle Punkte ξ', die innerhalb ϑ liegen und der vorstehenden Gleichung genügen, bilden eine Menge M_ϑ von der Art, dafs jeder isolirte Punkt ein eigentlicher Maximumspunkt ist und jeder Grenzpunkt, der innerhalb ϑ liegt, ein uneigentlicher Maximumspunkt. Denn sind $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\nu, \cdots$ Maximumspunkte innerhalb ϑ, so dafs ihr Grenzpunkt ξ_ω ebenfalls

1) Eine Function von x und y soll nirgends constant heifsen, wenn es keinen Flächenteil giebt, für dessen sämtliche Punkte sie constant ist.

2) Diese Erscheinung ist ganz analog zu den Eigenschaften der punktweise unstetigen Functionen mit einer abzählbaren und überall dichten Menge von Unstetigkeitsstellen, bei denen ebenfalls der Unstetigkeitsgrad bei Annäherung an einen Stetigkeitspunkt unter jede Grenze sinkt.



innerhalb ϑ liegt, so besteht, da $f(x)$ stetig ist, notwendig die Gleichung

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = \cdots = f(\xi_\nu) = f(\xi_\omega),$$

woraus die Behauptung folgt. Die Endpunkte von ϑ brauchen jedoch keine Maximumspunkte zu sein.

Sei nun ξ_1 ein uneigentlicher Maximumspunkt, der aufserhalb ϑ liegt, so dafs auch $f(\xi_1) = h$ ist, so bedingt er ein Intervall ϑ_1, das von ϑ notwendig getrennt ist, und in ihm eine Menge M_{ϑ_1} von Maximumspunkten $f(\xi) = h$. Die Zahl dieser Intervalle kann unendlich sein, so dafs ihre Endpunkte gegen gewisse Grenzpunkte convergiren. Da aber die Endpunkte der Intervalle nicht notwendig Maxima liefern, so gilt es auch von den Grenzpunkten, und es folgt:

II. Ist h ein Functionswert, der einem uneigentlichen Maximum von $f(x)$ entspricht, so gehört zu ihm eine nirgends dichte Intervallmenge $\Theta = \{\vartheta\}$, und in jedem Intervall eine abgeschlossene Menge M_ϑ, so dafs — eventuell abgesehen von den Endpunkten der Intervalle und deren Grenzpunkten — jeder isolirte Punkt dieser Menge ein eigentlicher und jeder Grenzpunkt ein uneigentlicher Maximumspunkt ist.

Der gleiche Satz gilt für die Minima. Was jede einzelne Menge M_ϑ betrifft, so kann sie sehr wohl perfect sein oder einen perfecten Bestandteil besitzen[1]).

Man kann noch zeigen, dafs die Werte h, die den Maximumspunkten entsprechen, eine höchstens abzählbare Menge bilden. Sei wieder $\Theta = \{\vartheta\}$ die zu h gehörige Intervallmenge und ϑ eines ihrer Intervalle. In ihm können ebenfalls Maxima liegen; eines gehöre zu dem Wert h', wo notwendig $h' < h$ ist. Dieser Wert h' bestimmt auf ϑ Intervalle ϑ', und es folgt aus der Stetigkeit von $f(x)$, dafs die Grenze dieser Intervalle nach links und rechts von den Endpunkten von ϑ verschieden ist. Hieraus schliefst man leicht, dafs auch die Menge der Werte $h, h', \cdots$ endlich oder abzählbar ist. Da nun die Menge der eigentlichen Maxima ebenfalls höchstens abzählbar ist, so folgt:

III. Die Menge aller Werte, die eine unendlich oft oscillirende Function in ihren Extrempunkten annehmen kann, ist endlich oder abzählbar[2]).

---

1) Ein triviales Beispiel, in dem M_ϑ perfect ist, erhält man folgendermafsen. Sei $D = \{\delta\}$ eine Intervallmenge, die eine perfecte Menge T bestimmt, so errichte man über jedem Intervall δ ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck und gebe der Function in allen Punkten von T den Wert Null, so ist jeder Punkt von T ein uneigentlicher Minimumspunkt.

2) Dafs diese Menge bei nicht stetigen Functionen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ haben kann, beweist das S. 137 gegebene Beispiel. Die obigen Sätze gab der Verfasser in den Schriften d. phys. ökon. Ges. zu Königsberg, Bd. 41.

Auch dieser Satz läfst sich auf Functionen mehrerer Variablen übertragen.

3. Um eine Anwendung der soeben eingeführten Begriffe zu geben, beweise ich mit ihrer Hilfe den oben (S. 148) genannten Satz von König. Aus der Voraussetzung des Satzes folgt zunächst, dafs jeder Punkt der Menge G eigentlicher Extrempunkt ist[1]). Hieraus läfst sich folgern, dafs es in jedem Teilintervall $\alpha \cdots \beta$ von $a \cdots b$ mindestens einen Wert η giebt, der an unendlich vielen Stellen des Intervalls von der Function angenommen wird. Ist nämlich ξ irgend ein Maximumspunkt der Function innerhalb $\alpha \cdots \beta$, und ϑ der zugehörige Bereich, so sei ϑ' dasjenige von ξ aus beginnende Teilintervall von ϑ, dem das absolute Minimum der Function innerhalb ϑ angehört, und ϑ_1' der andere Teilbereich. Dann wähle man innerhalb ϑ_1' einen Maximumspunkt ξ_1 beliebig aus, so liegt im Intervall ϑ' jedenfalls ein Punkt ξ_1', so dafs $f(\xi_1) = f(\xi_1')$ ist. Nun sei ϑ_1 der Maximumsbereich von ξ_1, der nach S. 157 notwendig innerhalb ϑ enthalten ist. Mit ihm kann man ebenso verfahren, wie eben mit ξ; es zerfällt dadurch ϑ_1 in die Bereiche ϑ'' und ϑ_1'', und es giebt, falls ξ_2 als Maximumspunkt in ϑ_1'' beliebig gewählt wird, innerhalb der Intervalle ϑ', ϑ'' je einen Punkt ξ_2', ξ_2'', so dafs

$$f(\xi_2) = f(\xi_2') = f(\xi_2'')$$

ist. So kann man weitergehen, woraus jetzt die Behauptung leicht folgt. Sind nämlich $\xi_1', \xi_2', \xi_3', \cdots$ die so definirten Punkte innerhalb ϑ', so sei ξ_ω' ein zu ihnen gehöriger Grenzpunkt, und es folgt nun, dafs für die so innerhalb $\vartheta', \vartheta'', \cdots$ definirten Grenzpunkte

$$f(\xi_\omega') = f(\xi_\omega'') = f(\xi_\omega''') = \cdots = f(\xi_\omega)$$

ist, wenn ξ_ω Grenzpunkt der Menge $\{\xi_\omega^{(\nu)}\}$ ist; also ist auch

$$\frac{f(\xi_\omega) - f(\xi_\omega')}{\xi_\omega - \xi_\omega'} = \frac{f(\xi_\omega) - f(\xi_\omega'')}{\xi_\omega - \xi_\omega''} = \cdots = 0,$$

woraus der Satz für $c = 0$ folgt. Da nun $f(x) - cx$ ebenfalls den Voraussetzungen des Satzes entspricht, so folgt er damit auch für beliebiges c.

4. Da die uneigentlichen Extrema den trivialen Fall darstellen, so beanspruchen nur diejenigen Functionen besonderes Interesse, die überall oscilliren und deren Extrema alle eigentlich sind. Um die Gesetze ihrer Ableitungen zu erforschen oder ihren Ableitungen bestimmte Eigenschaften aufzuprägen, nimmt man zweckmäfsig als diejenige Punktmenge, für die man die Functionswerte gleichmäfsig stetig vorschreibt, die Menge $\Xi = \{\xi\}$ der Extrema selber, oder doch wenigstens

1) Unter dieser Voraussetzung hat auch Köpcke den Satz bewiesen, Mitt. d. Hamb. Math. Ges. III, Heft 9, S. 376.

eine überall dichte Teilmenge von Ξ. Man läfst dazu das Intervall s in eine ungerade Zahl von Intervallen s_i zerfallen, jedes s_i in eine ungerade Zahl von Intervallen s_{ik} u. s. w.; bestimmt man alsdann die Function so, dafs die den einzelnen Intervallen entsprechenden Functionsdifferenzen abwechselnd positiv und negativ sind und gleichmäfsige Stetigkeit erzielt wird, so ergiebt sich eine stetige Function, die in jedem Punkte von Ξ ein Maximum oder Minimum besitzt. In dieser Weise ist die Frage von Brodén und Steinitz kürzlich behandelt worden. Brodén[1]) benutzt insbesondere einen speciellen Fall fortgesetzter Dreiteilung und bestimmt die Function so, dafs sich für jede Maximumsstelle und jede Minimumsstelle eine bestimmte vordere resp. hintere Ableitung entgegengesetzten Zeichens einstellt, für je eine überall dichte Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ eine bestimmte Ableitung, die Null, gröfser, resp. kleiner als Null ist; endlich giebt es aber auch analoge Mengen, für die zwei vordere resp. hintere Ableitungen existiren. Steinitz[2]) hingegen hat diese Art der Functionsbestimmung nur benutzt, um damit Functionen zu bilden, die in den Punkten von Ξ entweder zwei verschiedene unendliche oder endliche Ableitungswerte besitzen.

Die von Brodén und Steinitz construirten Functionen stellen mehr oder weniger specielle Fälle dieser Functionsklasse dar; es scheint mir daher nützlich, Formeln mitzuteilen, die alle stetigen Functionen dieser Art umfassen.

Dies ist jedenfalls so möglich, dafs man sich auf eine fortgesetzte Dreiteilung beschränkt, so dafs s zunächst in s_0, s_1, s_2 zerfällt, jedes s_i in s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, allgemein jedes s_N[3]) in s_{N0}, s_{N1}, s_{N2}, und dies so, dafs alle entstehenden Teilpunkte der Menge Ξ der Extremwerte angehören. Werden die zugehörigen Functionszuwachse wieder durch t_0, t_1, t_2, resp. t_{N0}, t_{N1}, t_{N2} bezeichnet, so setze man

$$s_{N0} = \tfrac{1}{2} s_N (1 - \varepsilon_{N0}), \quad s_{N2} = \tfrac{1}{2} s_N (1 - \varepsilon_{N2}), \quad s_{N1} = \tfrac{1}{2} s_N (\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}),$$

$$t_{N0} = \tfrac{1}{2} t_N (1 + \varphi_{N0}), \quad t_{N2} = \tfrac{1}{2} t_N (1 + \varphi_{N2}), \quad t_{N1} = -\tfrac{1}{2} t_N (\varphi_{N0} + \varphi_{N2}),$$

und zwar darf unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dafs t_{N0} und t_{N2} das gleiche Zeichen haben wie t_N, dagegen t_{N1} und t_N entgegengesetztes Zeichen, so dafs mit $\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}$ auch $\varphi_{N0} + \varphi_{N2}$ stets positiv ist. Es entspricht alsdann der erste Teilpunkt von s_N einem Maximum, falls $t_N > 0$ ist, und einem Minimum, falls $t_N < 0$ ist[4]). Setzen wir nun noch zur Abkürzung

---

1) Journ. f. Math. 118, S. 51.

2) Math. Ann. 52, S. 58ff. Steinitz benutzt im wesentlichen Teilungen der einzelnen Intervalle in mehr als drei Teile, die sich periodisch gleichartig fortsetzen.

3) Die Bezeichnung ist der früheren (S. 149) analog.

4) Die Stetigkeitsbedingung $\lim s_N = 0$ und $\lim t_N = 0$ erfordert auch hier nur, dafs der Quotient aus den unendlichen Producten der Factoren

$$(3) \quad \frac{1+\varphi_{N0}}{1-\varepsilon_{N0}} = \alpha_{N0}, \quad \frac{1+\varphi_{N2}}{1-\varepsilon_{N2}} = \alpha_{N2}, \quad -\frac{\varphi_{N0}+\varphi_{N2}}{\varepsilon_{N0}+\varepsilon_{N2}} = \alpha_{N1},$$

so hat man allgemein

$$(4) \qquad m_N = \frac{t_N}{s_N} = \alpha_i \alpha_{ik} \alpha_{ikl} \cdots \alpha_N \frac{t}{s} = A_N \frac{t}{s},$$

wo die Indices $i, k, l, \cdots$ mit denen der Indicesgruppe N übereinstimmen. Diese Quotienten sind es, die für die Werte der Ableitungen in erster Linie in Frage kommen. Aufser ihnen sind noch diejenigen Quotienten zu beachten, die den Entfernungen irgend eines auf s_N liegenden Punktes x von den Endpunkten von s_N entsprechen. Ein jeder solcher Punkt x wird bestimmt durch eine Folge

$$s_N, s_{Ni}, s_{Nik}, \cdots s_{NN'}, \cdots$$

mit bestimmten Indices $i, k, l, \cdots$. Wird nun $s_N = \xi_l \cdots \xi_r$ gesetzt, und werden die Intervalle $\xi_l \cdots x$ und $x \cdots \xi_r$ durch s_l resp. s_r bezeichnet, so gilt für die Werte von s_l und s_r das folgende. Liegt x in s_{N1}, so tritt in dem für s_l sich ergebenden Summenausdruck s_{N0} als Summand auf, ebenso s_{N2} in dem Summenausdruck für s_r. Liegt dagegen x in s_{N0}, so treten nur in s_r Summanden auf, und zwar $s_{N1}+s_{N2}$, und liegt x in s_{N2}, so treten nur in s_l Summanden auf, und zwar $s_{N0}+s_{N1}$.

Diese Angaben sind für das Folgende ausreichend. In weitere Einzelheiten einzugehen, ist hier nicht der Ort, es genügt die Bemerkung, dafs die Werte der Quotienten (3) von dem Convergenzcharakter der Producte A_N, sowie von den Gröfsen ε_N und φ_N abhängen, und es können durch geeignete Wahl dieser Gröfsen die verschiedensten Eigenschaften der Ableitungswerte erzielt werden, insbesondere auch diejenigen, die Brodén und Steinitz behandelt haben[1]). Auch hier wird man zweckmäfsig die aus den α_{N0}, resp. den α_{N1} und den α_{N2} gebildeten Teilproducte ins Auge fassen, die den (S. 152) eingeführten Producten U und V analog sind, und kann dadurch zu ähnlichen Resultaten gelangen, wie oben. Von allgemeinerem Interesse scheint mir nur noch der Hinweis auf gewisse Klassen von Punkten von Ξ_g, die sozusagen eine Art singulären Charakters besitzen.

$(1-\varepsilon_N)$, $(1+\varphi_N)$ u. s. w. und 2^ν den Grenzwert Null hat, nicht die Producte selbst. Vgl. oben S. 150. Man kann auch hier die Wertbestimmung so vornehmen, dafs die Extrema allen rationalen Stellen entsprechen und in ihnen die Functionswerte selbst rational sind. Dies ist auch für die differenzirbaren Functionen dieser Art möglich. Diese Functionen selbst sind dann sicher nicht rational. Vgl. S. 121 und die Anmerkung auf S. 137.

1) Vgl. auch noch Sätze von Harnack in Math. Ann. 23, S. 268.

Möge nämlich in der Indicesfolge $i, k, l, \ldots$, die den Punkt x bestimmt, von einer bestimmten Stelle an der Index 1 nicht mehr auftreten, also nur 0 und 2. Ist z. B. der νte Index eine Zwei, so können alle folgenden Indices bis zur ν'ten Stelle eine Null sein, und ebenso können von der $\nu_1$ten bis zur ν_1'ten Stelle alle Indices 0 sein u. s. w. Alsdann hat der oben für m_l gefundene Wert die Form

$$m_l = \frac{t_l}{s_l} = \frac{t_{N0} + t_{N1} + t_{N'0} + t_{N'1} + \cdots}{s_{N0} + s_{N1} + s_{N'0} + s_{N'1} + \cdots};$$

es ist aber für den Punkt x auch der Quotient

$$m_l' = \frac{t_l'}{s_l'} = \frac{t_{N1} + t_{N'0} + t_{N'1} + \cdots}{s_{N1} + s_{N'0} + s_{N'1} + \cdots}$$

ein solcher, der für die linksseitige Ableitung in Frage kommt, und da bei der hier vorausgesetzten Intervallteilung t_{N0} und t_{N1} verschiedenes Vorzeichen besitzen, so bedarf dieser Fall stets einer besonderen Aufmerksamkeit. Während nämlich das Zeichen des ersten Zählers von dem Verhältnis von $t_{N1} : t_{N0}$ abhängt, so ist dies für den zweiten Zähler das Verhältnis von $t_{N1} : t_{N'0}$, und es kann ja die Differenz $\nu' - \nu$ beliebig grofs werden und mit wachsendem ν selbst über jede Grenze wachsen. Die hier angedeutete Möglichkeit ist es, die den besonderen Charakter dieser Punkte bedingt.

5. Die wichtigste Anwendung, die ich von den obigen Formeln machen will, betrifft die von Köpcke entdeckte Thatsache, dafs es überall oscillirende Functionen giebt, die in jedem Punkte eine eigentliche Tangente besitzen. Dini hatte der zunächst höchst paradoxen Vermutung, dafs es solche Functionen geben kann, bereits gelegentlich Ausdruck gegeben[1]. Köpcke hat aber das Verdienst, hierzu ein specielles Beispiel ersonnen zu haben[2]. Er geht von einem über dem Intervall s stehenden Kreisbogen aus, dessen Gleichung $y = h_0(x)$ sei, und teilt dieses Intervall in soviele Teile s_i, dafs in jedem die Schwankung der Tangente unterhalb einer Gröfse k liegt. Nun construirt er über jedem Teilintervall s_i einen Polygonzug, dessen Seiten mit der x-Achse Winkel α_ν so bilden, dafs einerseits $|\operatorname{tg} \alpha_\nu| \leq k$ ist und andererseits für die mittlere Seite des Polygonzuges $\operatorname{tg} \alpha = -k$ ist, und schleift diesen Polygonzug an den Enden durch Kreisbogen ab, die das Intervall s_i in den Endpunkten berühren. Ist dann $y = h_1(x)$ die Gleichung der Gesamtheit aller dieser Polygonzüge, so besitzt die Curve

1) Grundlagen etc., S. 383. Du Bois-Reymond hatte dies für unmöglich gehalten. Journ. f. Math. 79, S. 32.

2) Math. Ann. 34, S. 161 und 35, S. 104. In der zweiten Abhandlung wird ein in der ersten vorhandener Irrtum corrigirt. Vgl. auch Festschr. d. Hamb. Math. Ges. 1890, S. 128, wo eine analytische Darstellung dieser (etwas modificirten) Function gegeben wird.

$$y = \mathfrak{H}_1(x) = h_0(x) + h_1(x)$$

über jedem Intervall s_i bereits mindestens ein Maximum und ein Minimum. Teilt man jetzt jedes Intervall s_i wieder so in Teile, daſs in jedem Teilintervall die Schwankung der Tangente der Curve $y = \mathfrak{H}_1(x)$ unterhalb k_1 liegt, fügt überdies alle Punkte von $\mathfrak{H}_1(x)$, in denen $\mathfrak{H}_1'(x) = 0$ ist, den Teilpunkten hinzu und construirt zu jedem so gebildeten Teilintervall s_{ik} einen analogen Polygonzug wie oben und fährt so fort, so genügt die so gebildete Function

$$\mathfrak{H}(x) = \lim \mathfrak{H}_\nu(x) = \sum_0^\infty h_\nu(x)$$

den Forderungen. Der Beweis beruht darauf, daſs für die speciellen von Köpcke benutzten Zahlenwerte $k, k_1, \cdots$ diese Reihe alle Eigenschaften besitzt, unter denen sie eine differenzirbare Function darstellt. Es ist andererseits klar, daſs die so definirte Function in jedem Teilpunkt, der bei fortgesetzter Teilung erhalten bleibt, ein Extremum und in ihm eine horizontale Tangente besitzt. Das hiermit construirte Beispiel ist kürzlich von Pereno[1]) vereinfacht worden.

Um die Bedingungen zu finden, unter denen die Formeln (3) zu Functionen dieser Art führen, und damit zugleich eine ganze Klasse solcher Functionen zu gewinnen, kann man so verfahren[2]). Da $\alpha_{N1} < 0$ ist, so folgt aus Gl. (4), daſs für jede Indicesfolge, die den Index 1 unendlich oft enthält, $\lim A_N = 0$ sein muſs, und dies kann dadurch bewirkt werden, daſs jedes aus unendlich vielen Factoren α_{N1} bestehende Product Null ist. Es würde genügen, $\lim \alpha_{N1} < 1$ zu nehmen; spätere Bedingungen führen sogar auf $\lim \alpha_{N1} = 0$. Soll zweitens in jedem Endpunkt eines unserer Intervalle s_N eine horizontale Tangente vorhanden sein, so muſs für ihn vordere und hintere Ableitung Null sein, und dies verlangt, daſs für jedes Intervall s_N die beiden seinen Endpunkten zugehörigen Producte

$$A_N^0 = \alpha_{N0} \cdot \alpha_{N00} \cdot \alpha_{N000} \cdots \quad \text{und} \quad A_N^2 = \alpha_{N2} \cdot \alpha_{N22} \cdot \alpha_{N222} \cdots$$

Null sind. Es müssen daher in jedem dieser Producte unendlich viele Factoren $\alpha_N < 1$ enthalten sein, die die Convergenz gegen Null bedingen. Setzt man z. B.

$$(5) \qquad \alpha_{N0} = \frac{1 + \varphi_{N0}}{1 - \varepsilon_{N0}} = 1 + a_N, \quad \alpha_{N2} = \frac{1 + \varphi_{N2}}{1 - \varepsilon_{N2}} = 1 - b_N,$$

so daſs $\Pi(1 - b_\nu) = 0$ ist, wählt überdies, was das einfachere ist, $\varepsilon_{N0} > 0$, $\varepsilon_{N2} > 0$, also $\varphi_{N2} < 0$, $\varphi_{N0} > 0$, so daſs $a_N > 0$ ist, und setzt noch

1) Giorn. di mat. 35, S. 132.

2) Für die ausführliche Darstellung vgl. eine demnächst erscheinende Arbeit des Verfassers in Math. Ann. Bd. 53. Auch Brodén hat kürzlich Functionen dieser Art construirt, Öfr. af. Vet. Ak. Förh. Stockholm 1900, S. 743.

$$a_N - b_N = \varepsilon_{N2} + \varepsilon'_{N2}, \quad 1 - c_N = \gamma_N,$$

so wird die Eigenschaft der horizontalen Tangente in allen Punkten von Ξ durch die Bedingungen gewährleistet, dafs

$$\varepsilon_{N2}(b_N - \gamma_N) + \varepsilon'_{N2} - \varepsilon_{N0}(1 + a_N + \gamma_N) = 0,$$
$$\varepsilon_{N2} b_N + \varepsilon'_{N2} - \varepsilon_{N0}(1 + a_N) > 0$$

ist, und ihnen ist durch geeignete Wahl der a, b, γ, ε und φ so zu genügen, dafs die verlangten Convergenzeigenschaften bestehen[1]). Dies läfst sich für jedes zu Grunde gelegte Product $\Pi(1 - b_\nu)$ wirklich erreichen, mit anderen Worten, es lassen sich den Intervallen s_N die Gröfsen b_μ so zuweisen, wie es die Gleichungen $A_N^0 = 0$, $A_N^2 = 0$ und die Bedingung, dafs $\lim A_N$ immer endlich und bestimmt ist, erfordern. Dies kann z. B. so geschehen, dafs

$$\lim \frac{b_N \varepsilon_{N2}}{\varepsilon'_{N2}} = 0 \quad \text{und} \quad \lim \frac{b_N \varepsilon_{N2}}{\varepsilon_{N0}} = 0$$

gesetzt wird. Damit ist jedoch die Bedingung, dafs für einen Punkt x von Ξ_g zugleich

$$\lim \frac{t_l}{s_l} = \lim \frac{t_r}{s_r} = \lim \frac{t_N}{s_N} = \lim A_N$$

ist, noch nicht von selbst erfüllt. Wenn nämlich der Punkt x ein solcher Punkt von Ξ_g ist, wie wir ihn oben betrachteten, in dessen Indicesfolge also längere Folgen von Nullen oder Zweien auftreten, so mufs noch bewirkt werden, dafs auch

$$\lim \frac{t'_l}{s'_l} = \lim A_N, \quad \text{resp.} \quad \lim \frac{t'_r}{s'_r} = \lim A_N$$

ist. Ist nun $\lim A_N \gtrless 0$, so ist hierfür noch zu verlangen, dafs, welches auch ν und ν' sein mögen, doch immer

$$\lim \frac{s_{N1}}{s_{N'0}} = 0 \quad \text{und} \quad \lim \frac{t_{N1}}{t_{N'0}} = 0$$

ist. Dies ist nun wirklich trotz der grofsen Beliebigkeit von ν und ν' möglich, und zwar deshalb, weil doch wieder die Werte ν, ν' dadurch beschränkt sind, dafs die Teilproducte der $\nu' - \nu$, $\nu'_1 - \nu_1, \cdots$ Factoren

$$A' = \alpha_{N0} \cdot \alpha_{N00} \cdot \alpha_{N000} \cdots, \quad A'_1 = \alpha_{N_1 0} \cdot \alpha_{N_1 00} \cdot \alpha_{N_1 000} \cdots$$

ein von Null verschiedenes Gesamtproduct $A' A'_1 \cdots$ geben. Dieser

1) Man hat natürlich auch den Fall ins Auge zu fassen, dass $\alpha_{N2} > 1$, $\alpha_{N0} < 1$ sein kann, was ganz analog zu erledigen ist.

Umstand ermöglicht es, die gestellte Bedingung zu erfüllen[1]). Wir schliefsen mit dem Satz:

IV. Es giebt stetige, überall oscillirende Functionen, die in jedem Punkte eine eigentliche Tangente besitzen.

6. Ist eine stetige Function $T(x)$ auf zwei Intervallen δ' und δ'' constant, die einen Endpunkt gemein haben, so ist sie auch auf dem Gesamtintervall $\delta' + \delta''$ constant. Dieser Schlufs gilt aber nicht allein beim Übergang von ν zu $\nu + 1$, sondern auch beim Übergang von $\{\nu\}$ zu ω. Sind nämlich x', x'', x''' irgend welche Punkte auf den bezüglichen Intervallen δ', δ'', δ''', $\cdots$, so folgt durch Schlufs von ν auf $\nu + 1$, dafs

$$(6) \qquad T(x') = T(x'') = \cdots = T(x^{(\nu)}) = T(x^{(\nu+1)})$$

ist. Wenn nun x_ω der Grenzpunkt der Intervalle $\delta^{(\nu)}$ ist, so wird gemäfs der Stetigkeit der Wert von $T(x_\omega)$ durch die Folge (6) für $\lim \nu = \infty$ dargestellt, woraus die Behauptung folgt. Also:

V. Ist eine stetige Function auf allen Intervallen einer Menge $D = \{\delta\}$ constant, so ist sie immer dann eine Constante, falls D eine abzählbare Punktmenge Q bestimmt.

Um streckenweise constante stetige Functionen $T(\xi)$ zu erhalten, müssen wir daher von vorn herein annehmen, dafs die Intervalle der Menge $D = \{\delta\}$ eine perfecte Menge T bestimmen. Alsdann giebt es aber auch Functionen dieser Art, wie das Folgende zeigt.

Um dies zu begründen und zugleich von der Mächtigkeit der Functionsklasse $T(\xi)$ eine Vorstellung zu geben, beweise ich folgenden Satz:

VI. Die Menge aller Functionen $T(\xi)$, die derselben im Intervall $a \ldots b$ liegenden Intervallmenge $D = \{\delta\}$ zugehören, läfst sich eineindeutig der Menge aller im Intervall $a \ldots b$ stetigen Functionen zuordnen.

Dieser Satz ist eine einfache Folge davon, dafs eine stetige Function $F(x)$ durch ihre Werte an einer überall dichten Menge bestimmt ist. Wir wählen als überall dichte Punktmenge die mehrfach benutzte Menge $X = \{x_N\}$ und beziehen (S. 79) eine Menge $D = \{\delta_N\}$ eineindeutig auf die Menge $X = \{x_N\}$, indem wir jedem Punkt x_N das Intervall δ_N zuweisen. Um die Beziehung zwischen

---

1) Für den Fall, dafs $\Pi(1 - b_\nu) = \Pi(1 - 1/_\nu)$ ist, habe ich die Untersuchung a. a. O. ausführlich durchgeführt. Ein einfaches Beispiel bilden in diesem Fall folgende Werte:

$$b_N = \frac{1}{\mu}, \quad a_N = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2^\nu}, \quad \varepsilon_{N2} = \frac{1}{2^{2^\nu}}, \quad \varepsilon_{N0} = \frac{1}{2^{3^\nu}},$$

wo für die zu jeder Indexgruppe N gehörigen Werte μ ein Gesetz besteht, so dafs $\nu < \mu < (1 + e)^\nu$ ist, für $0 < e$.

$T(\xi)$ und der stetigen Function $F(x)$ herzustellen, interpretiren wir jetzt diese Abbildung so, dafs wir dem Punkt x_N alle Punkte von δ_N zuweisen. Sind dann x und ξ irgend zwei entsprechende Punkte, und definiren wir die Function $T(\xi)$ durch die Gleichung

$$F(x) = T(\xi),$$

so ist damit $T(\xi)$ als stetige streckenweise constante Function im Intervall $a \cdots b$ definirt. Halten wir nun die Mengen D und X fest, so entspricht jeder stetigen Function $F(x)$, die nicht selbst streckenweise constant ist, eine und nur eine Function $T(\xi)$. Diese Entstehung von $T(\xi)$ aus $F(x)$ läfst sich kürzer so definiren, dafs man an jeder Stelle von x den bezüglichen Wert der Function $F(x)$ tilgt und statt seiner ein beliebiges Constanzintervall δ einschaltet[1]), so dafs der bezügliche Functionswert durch das ganze Intervall beibehalten wird.

Die Construction einer Function $T(\xi)$ mittelst einer Menge T findet sich zuerst bei Cantor[2]); im übrigen ist das durch sie definirte Functionsverhältnis unter anderem Gesichtspunkt in der Analysis längst bekannt, wie es überhaupt mannigfacher Auffassung fähig ist. Die Function $T(\xi)$ stellt zunächst einen speciellen Typus einer in T stetigen Function $f(x, T)$ dar. Ist sie insbesondere monoton, so stellt sie bei Vertauschung der unabhängigen Variablen eine punktweise unstetige Function dar, die nur Sprünge besitzt. Auch die Functionen, die bei der Peano'schen Abbildung sowie bei jeder Abbildung des Continuums auf eine nirgends dichte Menge auftreten, sind solche Functionen. Die noch eben benutzte Abbildung des Continuums mittelst der Mengen $X = \{x_N\}$ und $D = \{\delta_N\}$ führt zu einer Function $T(\xi)$, wenn man jedem Intervall δ_N den Wert x_N als Functionswert zuweist, wie auch umgekehrt ξ als Function von x eine Function ist, die an jeder Stelle x_N einen Sprung von der Gröfse δ_N hat[3]).

---

1) Vgl. auch S. 175 dieses Berichts. Man kann übrigens die Einschaltung auch so vornehmen, dafs man von einer überall oscillirenden Function $F(x)$ ausgeht und an jedem Extremum ein Intervall δ einfügt.

Auf den Begriff der streckenweise constanten Functionen ist übrigens kürzlich auch R. Baire geführt worden, gelegentlich des Problems, die Differentialgleichung

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

für den Fall zu integriren, dafs man sich auf das Reelle beschränkt und von den in ihr auftretenden Differentialquotienten nur die Existenz in jedem Punkt voraussetzt. (Ann. di mat. (3) 3, S. 101.) Der Satz V nimmt bei ihm die Form an, dafs eine Function constant ist, wenn sie punktweise variabel ist für jede perfecte Menge.

2) Acta math. 4, S. 387. Vgl. auch Volterra, Giorn. di mat. 19, S. 338, Harnack, Math. Ann. 24, S. 225, sowie Scheeffer, Acta math. 5, S. 287.

3) Auch die Peano'schen Zifferngesetze (S. 64) sind Functionen dieser Art. Ein derartiges Beispiel gab kürzlich auch Gravé, C. R. 127, S. 1005.

7. Die Ableitungen einer Function $T(\xi)$ werden einerseits von den Ableitungen der Function $F(x)$, andererseits von der Wahl der Menge $D = \{\delta\}$, insbesondere aber auch von ihrem Inhalt abhängen. Man hat in der That, falls ξ', ξ'' und x', x'' irgend zwei entsprechende Wertepaare sind,

$$\frac{T(\xi'') - T(\xi')}{\xi'' - \xi'} = \frac{F(x'') - F(x')}{x'' - x'} \cdot \frac{x'' - x'}{\xi'' - \xi'}.$$

Falls man also die Ableitungswerte von $F(x)$ als gegeben betrachtet, so handelt es sich nur um die Betrachtung des Differenzenquotienten

$$q(\xi'', \xi') = \frac{x'' - x'}{\xi'' - \xi'}.$$

Nun stellt aber x selbst eine monotone niemals abnehmende Function $T(\xi)$ dar, so dafs es genügt, die monotonen Functionen dieser Art ins Auge zu fassen, insbesondere diejenigen, die niemals abnehmen. Die im folgenden abzuleitenden Sätze gelten deshalb auch für die punktweise unstetigen Functionen, die höchstens zweiwertig sind.

Über die Ableitungen der Functionen $T(\xi)$ liegen nur gelegentliche Bemerkungen von Harnack[1]) und Scheeffer[2]) vor. Diejenige Harnack's geht dahin, dafs in dem von ihm construirten einfachen Beispiel die bezüglichen Ableitungen in allen Punkten von T unendlich grofs seien. Dies ist jedoch, wie sich zeigen wird, nicht der Fall.

Wir benutzen die S. 149 eingeführten Bezeichnungen, bezeichnen also das Intervall $a \cdots b$ durch s und $\alpha \cdots \beta$ durch τ, lassen den Intervallen s_N die Intervalle τ_N entsprechen, und bedienen uns der oben (S. 150) für s_N abgeleiteten Formeln. Wir bedürfen noch einer geeigneten Darstellung der Strecken τ_N. Wir haben hier zunächst (S. 76)

$$\tau_0 + \tau_1 = \tau - \delta = \tau(1 - \lambda)$$

und setzen demgemäfs

$$\tau_0 = \tfrac{1}{2}\tau(1 - \lambda)(1 + \varphi), \quad \tau_1 = \tfrac{1}{2}\tau(1 - \lambda)(1 - \varphi);$$

ebenso ist allgemein

$$\tau_{N,0} + \tau_{N,1} = \tau_N - \delta_N = \tau_N(1 - \lambda_N),$$

und wir setzen

$$\tau_{N,0} = \tfrac{1}{2}\tau_N(1 - \lambda_N)(1 + \varphi_N), \quad \tau_{N,1} = \tfrac{1}{2}\tau_N(1 - \lambda_N)(1 - \varphi_N),$$

alsdann wird

$$\tau_N = \frac{1}{2^\nu}\tau \cdot \Lambda_N \cdot \Phi_N,$$

---

1) Math. Ann. 24, S. 227 und 230. Vgl. auch S. 171 Anm.
2) Acta math. 5, S. 291.

für

$$A_N = (1-\lambda)(1-\lambda_i)\cdots(1-\lambda_{N-1}),$$
$$\Phi_N = (1 \pm \varphi)(1 \pm \varphi_i)\cdots(1 \pm \varphi_{N-1}),$$

und zwar hängen die Vorzeichen so von den Indices $i, k, l, \ldots$ ab, daſs dem Index 0 ein positives und dem Index 1 ein negatives Vorzeichen entspricht. Diese Formeln gestatten ein Urteil über die Werte der Ableitungen. Auch hier sind es wieder die oben (S. 152) eingeführten Quotienten m_N, $m_{N,0}$ und $m_{N,1}$, deren Grenzwerte für diese Werte in erster Linie in Frage kommen. Wir erhalten

$$m_N = \frac{s_N}{\tau_N} = \frac{s}{\tau} \cdot \frac{E_N}{\Phi_N \cdot A_N},$$
$$m_{N,i} = \frac{s_{N,i}}{\tau_{N,i}} = \frac{s}{\tau} \cdot \frac{E_N}{\Phi_N \cdot A_N} \cdot \frac{1 \pm e_N}{(1 \pm \varphi_N)(1-\lambda_N)};$$

dabei unterliegen die Producte E_N und Φ_N den S. 150 für F_N und E_N angegebenen Bedingungen, während der Wert von A_N vom Inhalt der Menge T abhängt. Man ersieht hieraus einerseits, daſs die Discussion dieser Formeln sich in Analogie setzen läſst mit der Discussion derjenigen, die wir a. a. O. für nirgends constante monotone Functionen aufgestellt haben; es mag daher genügen, hier auf diese Analogie hingewiesen zu haben. Wie dort, kann man auch hier durch specielle Annahmen die Structur der Function $T(\xi)$ in der mannigfachsten Weise beeinflussen. Andererseits zeigt das Auftreten von A_N, daſs auch der Inhalt von T von wesentlichem Einfluſs auf die Werte der Ableitungen sein wird, was wir sofort des näheren bestätigen werden. Nur auf einen Umstand besonderer Art soll noch hingewiesen werden. Falls wir nämlich das Intervall τ' bestimmen, das einem beliebig gewählten Intervall s' entspricht, so entspricht auch jetzt jedem Intervall $s_{N',0}$ und $s_{M',1}$ ein Intervall $\tau_{N',0}$ resp. $\tau_{M',1}$; es entspricht aber auſserdem dem auf s' liegenden Punkt x_N noch das ganze Intervall δ_N, ebenso jedem Punkt $x_{N'}$ ein Intervall $\delta_{N'}$ und jedem $x_{M'}$ ein Intervall $\delta_{M'}$, so daſs sich für τ' der Wert

$$\tau' = \delta_N + \Sigma(\tau_{N',0} + \delta_{N'}) + \Sigma(\tau_{M',1} + \delta_{M'})$$

ergiebt. In dem hier auftretenden Intervall δ_N liegen die Besonderheiten begründet, denen wir bei den Functionen $T(\xi)$ begegnen werden. Es besteht nämlich der Satz:

VII. Für jede monotone Function $T(\xi)$ giebt es je eine in Bezug auf T überall dichte Teilmenge von T_g von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, in deren Punkten eine vordere oder eine hintere Ableitung oder auch eine vordere und hintere Ableitung den Wert Null hat[1]).

1) Es giebt also bei jeder punktweise unstetigen Function mit Sprüngen solche Punkte, in denen eine Ableitung unendlich ist.

Diese Menge könnte als Menge zweiter Kategorie construirt werden. Ich gebe hier einmal eine etwas abweichende Bestimmung, um dabei zugleich die grofse Beliebigkeit und Mannigfaltigkeit der möglichen Ableitungswerte hervortreten zu lassen.

Es möge zunächst ein Punkt ξ_g von T_g im Intervall τ_N so bestimmt werden, dafs für ihn eine vordere Ableitung $D_+T(\xi_g) = 0$ ist. Den entsprechenden Punkt x_g denken wir uns wie oben (S. 151) als Grenzpunkt der Punktfolge $x_N, x_{N'}, x_{N''}, \cdots$, so dafs sich für das Intervall $x_N \cdots x_g$ der Wert ergiebt

$$s' = s_{N',0} + s_{N'',0} + s_{N''',0} + \cdots = \Sigma s_{N',0}.$$

Es ist dann sicher

$$\tau' = \delta_N + \Sigma(\tau_{N',0} + \delta_{N'})$$

ein entsprechendes Intervall[1]). Da nun s_N mit wachsendem ν gegen Null convergirt, so kann man Zahlen $\nu', \nu'', \nu''', \cdots$ so bestimmen, dafs

$$s_{N'} < k'\delta_N, \quad s_{N''} < k''\delta_{N'}, \quad s_{N'''} < k'''\delta_{N''}, \cdots$$

ist, wo $k' < k'' < k''' \cdots$ ist und $\lim k^{(\nu)} = 0$ ist; alsdann entspricht dem so bestimmten Punkt x_g ein Punkt ξ_g, der die verlangte Eigenschaft besitzt. Es ist nämlich $s' < s_{N'}$ und daher

$$\frac{s'}{\tau'} < \frac{s_{N'}}{\delta_N} < k';$$

werden also die Strecken $x_g \cdots x_{N''}, x_g \cdots x_{N'''}, \cdots$ durch $s'', s''', \cdots$ bezeichnet, und die entsprechenden Strecken $\tau'', \tau''', \cdots$ analog angenommen, so convergiren die Quotienten

$$\frac{s'}{\tau'}, \frac{s''}{\tau''}, \frac{s'''}{\tau'''}, \cdots$$

gegen Null, woraus die Behauptung folgt. Analog folgt die Behauptung für eine hintere Ableitung, und man sieht leicht, dafs man die Construction des Punktes ξ_g auch so ausführen kann, dafs eine vordere und eine hintere Ableitung Null ist. Wird nämlich ξ_g als gemeinsamer Grenzpunkt der Intervalle

$$\tau_N, \tau_{N,i}, \tau_{N,ik}, \cdots$$

betrachtet, so bestimme man die Indices $i, k, l, \cdots$ so, dafs zunächst für ν' dieser Intervalle der letzte Index 1 ist, dann sei er für μ' Intervalle 0, dann wieder 1 für ν'' Intervalle $\cdots$, wo $\nu', \mu', \nu'', \cdots$ wie oben bestimmt sind. Alsdann ist ξ_g ein Punkt, für den sowohl $D_+T(\xi_g) < k^{(\lambda)}$, als auch $D^-T(\xi_g) < k^{(\lambda)}$ ist. Dieses Verfahren zeigt zugleich, dafs die Mächtigkeit der so bestimmten Punkte ξ_g gleich $\mathfrak{c}$

1) Auch jedes Intervall $\tau' = k\delta_N + \Sigma\tau_{N',0} + \Sigma\delta_{N'}$, wo $0 \leq k \leq 1$, stellt ein entsprechendes Intervall dar.

ist. Anstatt nämlich die Bestimmung der Zahlen ν und μ abwechselnd vorzunehmen, kann man dies auch in jeder andern Reihenfolge bewirken; jedem unendlichen dyadischen Bruch entspricht ein Punkt ξ_g, indem man die Reihenfolge der μ und ν derjenigen der Ziffern 0 und 1 entsprechen läfst. (Vgl. S. 154.)

Im allgemeinen werden übrigens in den so bestimmten Punkten ξ_g beide vorderen und beide hinteren Ableitungen verschieden sein.

Ist in jedem Intervall τ_N die obere Grenze aller Ableitungen der Function $T(\xi)$ gleich g, so wird es überdies möglich sein, indem man die Gröfsen k', k'', k''', $\cdots$ so wählt, dafs $\lim k^{(\nu)} = g' < g$ ist, Punktmengen der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ zu construiren, in denen eine vordere oder hintere oder beide Ableitungen den Wert g' haben. Hiermit wird das obige König'sche Theorem auf Functionen $f(x, T)$ ausgedehnt, die für die perfecte Menge T monoton und stetig sind.

Diese Resultate zeigen, dafs für gewisse Punkte durchaus unerwartete Ausnahmen eintreten können; sie sind zugleich geeignet, die Vorstellung von der Natur des Continuums und von der Mächtigkeit der in ihm enthaltenen ebenfalls nicht abzählbaren Punktklassen zu klären und zu vervollkommnen. Hierauf hat man bisher kaum genügende Rücksicht genommen. Ich erwähnte schon, dafs Harnack sich dahin ausgesprochen hat, dafs die von ihm construirte Function $T(\xi)$ in allen Punkten von T eine bestimmte unendliche Ableitung besitze, während es leicht ist, Punkte anzugeben, die dem vorstehenden Satz entsprechen[1]).

8. Der Einflufs, den der Inhalt $J(T)$ von T auf die Werte der Ableitungen hat, spricht sich in folgenden Sätzen aus:

VIII. Ist die Menge T der monotonen Function $T(\xi)$ unausgedehnt, so giebt es eine in Bezug auf T überall dichte Teilmenge T_1 zweiter Kategorie, an der eine vordere resp. hintere Ableitung unendlich wird.

Ist nämlich $\tau_N = \xi' \cdots \xi''$ ein beliebiges Intervall, das seinerseits wieder in die Intervalle

$$\tau_{N,i},\ \tau_{N,ik},\ \cdots\ \tau_{N'}$$

zerfällt, wo N' eine Gruppe von ν' Indices bedeutet, und sind $\xi'_{N'}$ und $\xi''_{N'}$ die Endpunkte von $\tau_{N'}$, so kann nicht für jedes dieser Intervalle $\tau_{N'}$

1) Vgl. für diese Function die Angaben auf S. 102. Dazu ist noch zu fügen, dafs $s_N = \frac{1}{2^\nu}$ ist. Man setze ferner $\mu = 10$, $\mu' = 20$, $\nu_1 = 20$, $\nu_1' = 60$, $\mu'' = 60$, $\mu_1'' = 120$ u. s. w., so erhält man ein Beispiel. Dini bezeichnet die Frage nach den Ableitungen in den Punkten von T_g resp. diejenige, die mit ihr äquivalent ist, ausdrücklich als eine offene. Vgl. Grundlagen etc., S. 203, wo die hierhergehörige Riemann'sche Function betrachtet wird.

$$q(\xi''_{N'}, \xi'_{N'}) = \frac{T(\xi''_{N'}) - T(\xi'_{N'})}{\xi''_{N'} - \xi'_{N'}} \leq G$$

bleiben, wie auch G gewählt sein möge. Denn sonst folgte durch Summation über alle diese Intervalle $\tau_{N'}$

$$T(\xi'') - T(\xi') \leq G \Sigma \tau_{N'}.$$

Ist aber $J(T) = 0$, so kann man ν' so grofs wählen, dafs $\Sigma \tau_{N'}$ beliebig klein wird, womit die letzte Ungleichung im Widerspruch steht. Es giebt also mindestens ein Intervall $\tau_{N'} = \tau'$, so dafs in ihm

$$q(\xi''_{N'}, \xi'_{N'}) > G$$

ist. In diesem Intervall τ' giebt es wieder mindestens ein analoges Intervall τ'' u. s. w. Die so gefundenen Intervalle $\tau', \tau'', \tau''', \cdots$ convergiren nun entweder gegen einen Punkt von T_l resp. T_r oder gegen einen Punkt von T_g. Ist es ein Punkt ξ_l von T_r, so ist in ihm eine vordere Ableitung unendlich grofs, ist es ein Punkt ξ_r von T_l, so eine hintere. Convergiren aber die Intervalle gegen einen Punkt ξ_g von T_g, so besteht von den beiden Relationen

$$T(\xi_g) - T(\xi'_N) > G(\xi_g - \xi'_N), \qquad T(\xi''_N) - T(\xi_g) > G(\xi''_N - \xi_g)$$

notwendig mindestens eine; es wird daher auch mindestens eine vordere oder eine hintere Ableitung in ξ_g unendlich grofs.

Die so gefundene Menge liegt jedenfalls überall dicht in T. Sie ist daher eine Menge der zweiten Kategorie. Dies folgt nunmehr aus dem Satz von Brodén, der auf Functionen übertragen werden kann, die für eine Menge T definirt sind. Übrigens kann, auch wenn $J(T) = 0$ ist, doch eine überall dichte Teilmenge von T_r resp. T_l existiren, an der eine bestimmte vordere oder hintere Ableitung den Wert Null hat oder endlich ist[1]). Die allgemeine Möglichkeit hiervon erhellt daraus, dafs, wie aus dem obigen folgt, welches auch der Wert von Δ_N sei, durch geeignete Wahl von E_N und Φ_N die Structur der Function so beeinflufst werden kann, dafs sie jedenfalls an einer abzählbaren Menge von Stellen ein willkürlich vorgeschriebenes Verhalten aufweist.

Der Satz VIII stellt jedoch keine ausschliefsliche Eigenschaft der Functionen $T(\xi)$ dar, für die $J(T) = 0$ ist.

Ist für die Menge T im Intervall $\alpha \cdots \beta$ überall $J(T) > 0$, so kann es immer noch Punkte von T geben, in denen eine Ableitung

1) Ein Beispiel dieser Art liefern die Werte

$$\delta_N = \frac{1}{2}\tau_N, \quad \tau_{N0} = \frac{\mu_\nu}{2}\tau_N, \quad \tau_{N1} = \frac{1-\mu_\nu}{2}\tau_N,$$

$$\varphi_N = 2\mu_\nu - 1 = \varphi_\nu, \quad f_N = -f_\nu = \frac{1}{2}(1+\varphi_\nu)\varrho_\nu - 1,$$

so dafs $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_\nu$ gegen Null convergirt.

unendlich wird, und diese können sogar auch überall dicht in Bezug auf T liegen[1]. Die Werte der Ableitungen können aber auch in allen Punkten von T endlich bleiben[2]. Auf ein Beispiel dieser Art ist bereits von Scheeffer[3] hingewiesen worden. Man sieht leicht, dafs die Gröfsen λ_N^0 und λ'_N (S. 95) mit wachsendem ν gegen Null convergiren müssen, doch ist diese Bedingung allein noch nicht hinreichend. Man kann die Menge T insbesondere so wählen, dafs die vorderen Ableitungen in den Punkten von T_r und die hinteren Ableitungen in den Punkten von T_l den Wert 1 erhalten, was zu einer interessanten Folgerung führt. Fafst man nämlich jetzt eine beliebige Function $T(\xi)$ ins Auge, die aus irgend einer stetigen Function $F(x)$ mittelst der Menge D durch Einschaltung der bezüglichen Intervalle abgeleitet ist (S. 167), so stimmen die Ableitungen von $F(x)$ in den Punkten von X mit denen von $T(\xi)$ in den Punkten von T_l resp. T_r überein, und dies ist augenscheinlich ganz unabhängig von den absoluten Längen der Intervalle δ. Die hierzu notwendige Bedingung lautet vielmehr, dafs für jedes Teilintervall $\tau - d = \sigma$ ist, wo $d = \Sigma\delta$ ist, und diese ist bei der bezüglichen Einschaltungsart immer erfüllt. Doch mag es mit diesen Andeutungen hier genügen.

Nur eine Frage allgemeiner Art soll hier noch gestreift werden. Man kann fragen, wie die Umkehrung des Satzes VIII lautet, unter welchen Bedingungen man also schliefsen kann, dafs T unausgedehnt ist. Wir sahen soeben, dafs auch, wenn $J(T) > 0$ ist, die Ableitungen an einer bezüglich T überall dichten Teilmenge T_1 unendlich sein können. Hieraus folgt nun aber nach dem Satz von Brodén, dafs $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{c}$ ist; diese Eigenschaft ist also nicht hinreichend, damit T unausgedehnt ist. Soweit meine Untersuchungen reichen, wird man diesen Schlufs machen können, wenn es Teilmengen T_1 der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ giebt, in deren Punkten sowohl eine vordere wie eine hintere Ableitung unendlich ist; ich bin aber nicht im stande zu beweisen, dafs dies für jede Function $T(x)$ zutrifft, für die $J(T) = 0$ ist, obwohl dieser Satz sehr wahrscheinlich ist.

9. Der Begriff der streckenweise constanten Function läfst sich auf mehrere Variable übertragen, da auch für sie die Beziehungen zwischen der überall dichten Bereichmenge $D = \{\delta\}$ und der zu-

1) Ein einfaches Beispiel dieser Art liefern die Werte

$$\lambda_N = \frac{1}{\nu}, \quad e_N = \frac{1}{2}, \quad \varphi_N = \frac{1}{2};$$

sie bewirken, dafs in allen Punkten von T_r eine vordere Ableitung unendlich grofs ist.

2) Dies tritt z. B. für $\lambda_N = \frac{1}{\nu^2}$, $f_N = \varphi_N = 0$ ein.

3) Vgl. Acta math. 5, S. 291.

gehörigen perfecten Menge in ähnlicher Weise vorhanden sind wie im linearen Gebiet. Auch hier gilt, daſs eine Function, die auf δ' und δ'' constant ist, immer auch auf $\delta' + \delta''$ constant ist, falls die Grenzen von δ' und δ'' irgend einen gemeinsamen Punkt besitzen, und daſs daher für eine bereichweise constante stetige Function $T(\xi, \eta)$ nur solche Mengen $D = \{\delta\}$ in Frage kommen, die wieder eine perfecte Menge T bestimmen[1]). Es hat keinerlei Schwierigkeit, die Construction einer solchen Function $T(\xi, \eta)$ an der Hand der oben (S. 81) gegebenen Analyse der ebenen perfecten Mengen wirklich vorzunehmen.

10. Sei Q eine abgeschlossene Menge, die zu der Intervallmenge $D = \{\delta\}$ gehört, und $F(x, Q)$ eine für Q definirte Function von x, die in Q stetig ist. Definirt man nun die Function $F_1(x)$ so, daſs sie in jedem Punkt von Q mit $F(x, Q)$ übereinstimmt und längs jedes Intervalles δ linear verläuft, so ist $F_1(x)$ eine streckenweise lineare und stetige Function der continuirlichen Variablen x. Umgekehrt ist auch klar, daſs jede streckenweise lineare Function, deren Intervallmenge $D = \{\delta\}$ eine Menge Q bestimmt, eine in Q stetige Function darstellt; so liefert z. B. auch jede Function $T(\xi)$ eine in T stetige Function $F(x, T)$. Die in Q stetigen Functionen sind also mit den streckenweise linearen Functionen identisch, und die Resultate, die für die eine Gattung gelten, finden auf die andere sinngemäſse Anwendung. Die Menge Q braucht hier übrigens nicht perfect zu sein, sie kann sogar auch endlich sein.

Wir fragen nun insbesondere, ob es streckenweise lineare Functionen $L(\xi)$ geben kann, die in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung besitzen. Ist dann zunächst Q abzählbar, so zeigt man leicht, daſs $L(\xi)$ selbst linear ist. Wenn nämlich $L(\xi)$ für $\delta' = \xi_1 \cdots \xi_2$ und $\delta'' = \xi_2 \cdots \xi_3$ linear ist, und in ξ_2 vordere und hintere Ableitung einander gleich sind, so ist $L(\xi)$ auf $\delta' + \delta''$ linear, und dieser Schluſs gilt auch von ν auf $\nu + 1$. Er gilt aber auch von $\{\nu\}$ auf ω. Haben nämlich die consecutiven Intervalle $\delta', \delta'', \delta''', \cdots$ resp. ihre Endpunkte $\xi_2, \xi_3, \cdots \xi_\nu, \cdots$ den Grenzpunkt ξ_ω, und ist $L_1(\xi)$ diejenige lineare Function, die auf δ mit $L(\xi)$ übereinstimmt, so hat man

$$L(\xi_1) = L_1(\xi_1),\; L(\xi_2) = L_1(\xi_2),\; \cdots L(\xi_\nu) = L_1(\xi_\nu),\; \cdots,$$

und daraus folgt wegen der Stetigkeit von $L(\xi)$, daſs auch

$$L(\xi_\omega) = L_1(\xi_\omega)$$

sein muſs. Wenn sich nun an ξ_ω das Intervall $\delta_\omega = \xi_\omega \cdots \xi_{\omega+1}$ anschlieſst, so ist die Function einerseits auf $\xi_1 \cdots \xi_\omega$, andererseits auf $\xi_\omega \cdots \xi_{\omega+1}$ linear, und die Existenz einer bestimmten Ableitung in ξ_ω bewirkt wieder, daſs $L(\xi)$ auch auf $\xi_1 \cdots \xi_{\omega+1}$ linear ist u. s. w.

1) Übrigens brauchen nicht je zwei Bereiche getrennt zu sein (S. 85).

Die vorstehende Thatsache wurde in ihrem ersten Teil von Heine[1]) geltend gemacht, in ihrem zweiten von Cantor[2]), und wurde von ihnen für die Zwecke der trigonometrischen Reihen abgeleitet[3]). Es folgt also:

IX. Ist eine stetige Function auf jedem Intervall einer Menge $D = \{\delta\}$ linear, so ist sie eine lineare Function, falls sie in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung besitzt, und die Menge D eine abzählbare Menge Q bestimmt.

Streckenweise lineare Functionen, die in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung besitzen, können also nur so existiren, dafs Q eine perfecte Menge T ist. Es fragt sich, ob dies auch wirklich der Fall sein kann. Diese Frage ist zu bejahen, wie unmittelbar daraus hervorgeht, dafs das Integral einer jeden streckenweise constanten stetigen Function $T(\xi)$ eine solche Function liefern mufs[4]). Man kann aber die Existenz solcher Functionen auch unabhängig vom Integralbegriff und seinen Eigenschaften nachweisen, und es scheint mir nützlich, dies für einen einfachen typischen Fall hier auszuführen.

Dazu gehe man von einer im Intervall $a \cdots b$ monotonen differenzirbaren Function $f(x)$ aus, und es sei auch ihre Ableitung $f'(x)$ monoton und stetig, und nirgends constant. Nun werde auf $a \cdots b$ eine überall dichte Punktmenge $\{x\}$ angenommen, so kann man sich vorstellen, dafs für jeden einzelnen dieser Werte x der Zusammenhang der Curve gelöst und ein geradliniges Stück eingefügt wird, das die Richtung der Curventangente hat; dann wird die Aufgabe gelöst sein. Dieser Idee läfst sich in folgender Weise eine präcise Darstellung geben. Sei T eine im Intervall $\alpha \cdots \alpha_1$ gelegene überall ausgedehnte perfecte Menge und $D = \{\delta_N\}$ ihre Intervallmenge. Ein beliebiges Intervall $\delta_N = \xi_N \cdots \xi'_N$ zerlegt T in zwei Teilmengen, von denen die eine in dem Intervall $\alpha \cdots \xi_N$ enthalten ist. Diese bezeichnen wir durch T_N. Es ist dann der Voraussetzung nach auch T_N eine ausgedehnte Menge; und es möge $\Sigma_N(\delta)$ die Summe derjenigen Intervalle δ bedeuten, die zur Menge T_N gehören, so dafs

$$J(T_N) = \xi_N - \alpha - \Sigma_N(\delta)$$

ist. Nun ordne man wieder jedem Intervall δ_N einen Punkt x_N innerhalb $a \cdots a_1$ so zu, dafs

$$x_N - a = J(T_N) = \xi_N - \alpha - \Sigma_N(\delta)$$

gesetzt wird; dann ist die Menge $X = \{x_N\}$, wie man leicht sieht,

1) Journ. f. Math. 71, S. 359.
2) Math. Ann. 5, S. 131. Vgl. auch Hölder, Math. Ann. 24, S. 194.
3) Vgl. auch noch Cap. 7.
4) So verfährt z. B. Gravé, vgl. Anm. 3 auf S. 167.

überall dicht, und es ist dadurch wiederum jedem Punkt von T_g ein Punkt von X_g zugeordnet.

Um nun noch die Wertbestimmung von $\eta = L(\xi)$ auszuführen, denken wir uns auf der η-Axe im Intervall $\beta \cdots \beta_1$ eine perfecte Menge S, die zu einer Intervallmenge $E = \{\varepsilon_N\}$ gehört, und zwar so, dafs

$$\varepsilon_N = \delta_N f'(x_N) = \delta_N \operatorname{tg} \alpha_N$$

ist, und es sei S_N diejenige Teilmenge, die T_N entspricht. Alsdann mögen die Werte von $\eta = L(\xi)$ durch die Gleichungen

$$\eta_N - \beta = y_N + \Sigma_N(\varepsilon),$$
$$\eta_N' - \beta = y_N + \Sigma_N(\varepsilon) + \varepsilon_N$$

gegeben sein, während $L(\xi)$ von η_N bis η_N' linear zunimmt, so ist damit $L(\xi)$ eine Function der verlangten Beschaffenheit. Sie ist, wie unmittelbar ersichtlich ist, eine stetige Function und hat auch überall eine eigentliche Ableitung. Es mag genügen, dies für einen Punkt ξ_g von T_g nachzuweisen. Man hat dann

$$\frac{\eta' - \eta_g}{\xi' - \xi_g} = \frac{y' - y_g + \Sigma'(\varepsilon)}{x' - x_g + \Sigma'(\delta)},$$

wo $\Sigma'(\varepsilon)$ und $\Sigma'(\delta)$ die Intervallsummen bedeuten, die zwischen ξ_g und ξ', resp. zwischen η_g und η' liegen. Wenn nun ξ' gegen ξ_g convergirt, so convergirt auch x' gegen x_g, und auf Grund der obigen Gleichungen convergiren daher

$$\frac{y' - y_g}{x' - x_g} \quad \text{und} \quad \frac{\Sigma'(\varepsilon)}{\Sigma'(\delta)}$$

gemeinsam gegen $f'(x_g)$. Damit ist die Behauptung erwiesen. Ebenso folgt sie für die Werte ξ_N und ξ_N'. Wir gelangen demnach zu folgendem Satz:

X. Hat die Function $f(x)$ eine stetige Ableitung $f'(x)$, so kann man streckenweise lineare Functionen so bilden, dafs sie überall eine Ableitung besitzen und die Werte ihrer Ableitungen in den Punkten von T mit denjenigen von $f'(x)$ übereinstimmen.

Die für den Beweis gemachte Annahme, dafs $f'(x)$ monoton sein sollte, ist nämlich für den Satz nicht wesentlich. Wird $f'(x)$ zunächst als überall endlich angenommen, so kann man sie durch Addition einer geeigneten Linearfunction in eine monotone Function verwandeln, dazu $L(\xi)$ bestimmen, und dann die bezügliche Linearfunction wieder subtrahiren. Ist $f'(x)$ nicht überall endlich, so zerfällt doch das Intervall $a \cdots b$ in Teilintervalle, für die die Betrachtung gilt, und man gelangt ebenfalls zum Ziel; die Zahl der Intervalle könnte sogar unendlich sein. Dagegen haftet der vor-

stehenden Methode eine Beschränkung anderer Art an; sie setzt T resp. jede Teilmenge T_N als ausgedehnt voraus, während der Integralbegriff aus jeder beliebigen Function $T(\xi)$ eine Function $L(\xi)$ hervorgehen läſst. Inwieweit hier ein tieferer Unterschied zwischen beiden Functionsarten zu Grunde liegen mag, vermag ich nicht zu beurteilen[1]).

Da der Begriff der Ableitung auch für Functionen definirbar ist, die nur für nirgends dichte abgeschlossene oder perfecte Mengen existiren, so führen die vorstehenden Resultate unmittelbar zu Sätzen und Eigenschaften für Functionen $F(x, Q)$ resp. $F(x, T)$ und ihre Ableitungen.

Fünftes Capitel.

Das bestimmte Integral.

Auf die Sätze der Integralrechnung ist die Theorie der Punktmengen von wesentlichem Einfluſs gewesen; haben doch die Bemühungen, den Begriff des bestimmten Integrals festzulegen und entscheidende Kriterien für die Integrirbarkeit einer Function zu finden, ganz besonders zur Ausgestaltung der Theorie der Punktmengen beigetragen. Auch hier ist bekanntlich Riemann als derjenige zu nennen, an den die moderne Entwicklung angeknüpft hat. In directem Anschluſs an ihn hat Hankel als erster den Versuch unternommen, diesen Dingen methodisch gerecht zu werden, doch erscheint erst bei Harnack und Volterra die Abhängigkeit der Integrirbarkeit von den Unstetigkeitspunkten in der Gestalt, die an den Inhalt der Punktmengen anknüpft (1). Daſs der Wert einer Function $f(x)$ in einzelnen und sogar unendlich vielen Punkten abgeändert werden kann, ohne daſs das Integral sich ändert, hat eingehender wohl zuerst Dini in Betracht gezogen; die Erkenntnis, wie dies in allgemeinster Weise möglich ist, geht aber wieder erst auf Harnack zurück. Am deutlichsten wird übrigens die Darstellung dieser Verhältnisse, falls man von der Function $f(x)$ zu der zugehörigen möglichst stetigen Function $\varphi(x)$ übergeht. Nur die Stetigkeitspunkte von $f(x)$ sind es, die den Wert des Integrals beeinflussen, während man an den Unstetigkeitspunkten von $\varphi(x)$ der Function irgend einen Wert des zugehörigen Unstetigkeitsintervalls beilegen darf. Die Auffassung, von vorn herein $\varphi(x)$ an den Unstetigkeitspunkten als nicht einwertig anzunehmen, erscheint gerade für die Zwecke der Integralrechnung als besonders vorteilhaft.

Falls die Function $f(x)$ im Intervall $a \dots b$ nicht mehr innerhalb endlicher Schranken bleibt, sei es, daſs sie in einem Punkte ξ

1) Man kann auch die Formeln von S. 168 zur Bildung der Functionen $L(\xi)$ benutzen.

bestimmt unendlich ist, oder auch nur bei Annäherung an ihn unbegrenzt wächst, so versagt unsere Definition des bestimmten Integrals. Es kann aber bekanntlich möglich sein, auch in diesem Fall einen endlichen Grenzwert als Wert des Integrals zu definiren, und zwar kann das Integral nach einer von P. du Bois-Reymond herrührenden Unterscheidung unbedingt oder bedingt convergent sein. Ob ein derartiger endlicher Grenzwert existirt oder nicht, hängt in erster Linie davon ab, von welcher Ordnung die Function $f(x)$ in einem Punkte ξ unendlich wird. Dies zu erörtern, liegt aufserhalb des Rahmens dieses Berichts; hier soll vielmehr nur die principiellere Frage behandelt werden, wie die Menge $K_\infty = \{\xi\}$ der Unendlichkeitspunkte beschaffen sein darf, damit sich ein Integral überhaupt definiren läfst. Den Fall, dafs die Menge $\{\xi\}$ endlich ist, hat bereits Cauchy erledigt. Du Bois und bald nach ihm Dini sind wohl die ersten gewesen, die unendliche Mengen K_∞ ins Auge fafsten; beide beschränkten sich aber noch auf Mengen erster Gattung (3). Die allgemeinste Ausdehnung dieses uneigentlichen Integralbegriffs ist erst in neuester Zeit von A. Harnack und später von de la Vallée Poussin gegeben worden (4). Beide treffen von vorn herein die Festsetzung, dafs die Menge K_∞ unausgedehnt sein soll; doch ist zu bemerken, dafs sich diese Voraussetzung aus der Definition de la Vallée Poussin's als Folgerung ableiten läfst, so dafs diese Definition als die logisch beste aufzufassen ist (5). Für bedingt convergente Integrale hat sich übrigens de la Vallée Poussin auf abzählbare Mengen K_∞ beschränkt, während eine solche Unterscheidung bei Harnack nicht auftritt und auch nicht durch die Sache geboten ist (6). Freilich hat man in neuerer Zeit angefangen, den bedingt convergenten Integralen die Existenzberechtigung ganz und gar abzusprechen. Von den allgemeinen Integraleigenschaften bleiben nämlich für sie noch weniger in Kraft, als für die unbedingt convergenten, insbesondere schwindet aber für sie eine Eigenschaft, die man als grundlegend betrachten mufs (12).

Die vorstehenden Thatsachen haben ihr Analogon in der Theorie des Doppelintegrals und der mehrfachen Integrale (8), ohne hier neue Betrachtungen principieller Art zu bedingen; ruhen sie doch sämtlich auf Begriffen und Methoden, die für das ebene und räumliche Gebiet ebenso in Geltung sind, wie für das lineare. Gerade die Theorie des Doppelintegrals ist in den letzten Jahrzehnten von den verschiedensten Seiten eingehend behandelt worden; sie hat sich allmählich dem Einflufs der Theorie der Punktmengen unterziehen müssen, ohne sich doch bisher ganz auf den Boden dieser Theorie zu stellen. Der Grund kann nur der sein, dafs eine Analyse der ebenen abgeschlossenen Mengen bisher gefehlt hat, und ich hoffe durch diesen Bericht zu zeigen, dafs diese Analyse in der That die naturgemäfse Grundlage für die Theorie des Doppelintegrals darstellt.

Auch die im ebenen Gebiet neu auftretende Frage nach der Ersetzbarkeit des Doppelintegrals durch ein zweimaliges und umgekehrt erhält durch die allgemeinen Sätze über Punktmengen eine einfache Antwort (9), zumal wenn man überdies durchgehends von der Function $f(x, y)$ zu der zugehörigen möglichst stetigen Function $\varphi(x, y)$ übergeht. Einen besonderen Vorteil hat mir die Einführung von $\varphi(x, y)$ in der Theorie der uneigentlichen Doppelintegrale geliefert, wo sie den Satz von der Ersetzbarkeit des Doppelintegrals durch zweimalige Integrale auf fast elementarem Wege liefert. Auch hier ist es wieder die Definition de la Vallée Poussin's, die sich für die einschlägige Theorie als die am meisten naturgemäfse erweist.

Eine eingehende Behandlung hat das Doppelintegral noch ganz kürzlich in dem Lehrbuch von Stolz gefunden. Gegen den von Stolz gewählten Entwickelungsgang habe ich jedoch Bedenken, die ich nicht zurückhalten möchte. Seine Betrachtungen machen das Dreieck und Viereck oder gar das Vieleck zur Grundlage der Inhaltsbehandlung[1]). Aber wohin würden wir geraten, wenn wir diesen Weg auch im Raum und in höheren Mannigfaltigkeiten einschlagen würden? Die natürliche Basis des Inhaltsbegriffes ist meines Erachtens in der Ebene das Parallelogramm, im Raum das Parallelepipedon, sei es nun schiefwinklig oder rechtwinklig, und ich halte es für eine natürliche Aufgabe, jeden Inhalt so auf Summen solcher Elementarbestandteile zurückzuführen, dafs diese Summen nicht nur formale Bedeutung haben, sondern zur Grundlage der Entwickelungen gemacht werden können. Dies habe ich bei der Analyse der ebenen und räumlichen Mengen angestrebt, und diesem Umstand wäre es zu danken, wenn es mir dadurch gelungen wäre, den einfachen geometrischen Vorstellungen wieder zu ihrem natürlichen Recht zu verhelfen.

1. Die neueren Formulirungen des Integralbegriffs gehen bekanntlich davon aus, zunächst die beiden verschieden definirten und immer vorhandenen Grenzwerte ins Auge zu fassen, die das Analogon des äufseren und inneren Inhalts bei Punktmengen bilden. Ist $f(x)$ eine im Intervall $a \dots b$ endliche[2]) Function, und wird das Intervall $a \dots b = \tau$ in die Teilintervalle

$$\tau_0 = x_1 - a, \quad \tau_1 = x_2 - x_1, \dots, \quad \tau_\nu = b - x_\nu$$

zerlegt, so convergiren die Summen

$$G = (x_1 - a) g_0 + (x_2 - x_1) g_1 + \dots + (b - x_\nu) g_\nu$$

1) „Die wahren Elemente einer Fläche sind die Dreiecke." Grundzüge III, S. 40.

2) Dies bedeutet, dafs $|f(x)|$ unterhalb einer angebbaren Zahl bleibt. Die Franzosen nennen nach C. Jordan die Function fonction bornée. Es scheint mir das natürlichste, dem Wort „endlich" ebenfalls diese Bedeutung zu geben, was sachlich und sprachlich zulässig ist.

und

$$L = (x_1 - a)\,l_0 + (x_2 - x_1)\,l_1 + \cdots + (b - x_\nu)\,l_\nu,$$

wo g_i die obere und l_i die untere Grenze von $f(x)$ auf τ_i ist, für $\lim \nu = \infty$ und $\lim \tau_i = 0$ gegen zwei feste Grenzwerte, die als oberes und unteres Integral bezeichnet werden[1]). Sind sie einander gleich, so ist ihr gemeinsamer Wert J das bestimmte Integral von $f(x)$, und es heifst $f(x)$ integrirbar auf $a \dots b$. Hieraus folgt sofort die Integrirbarkeitsbedingung von $f(x)$ in der Form, die auf Riemann zurückgeht; nach ihr ist die Function $f(x)$ im Intervall $a \dots b$ immer und nur dann integrirbar, falls bei Teilung des Intervalls in eine endliche Zahl von Teilen τ_i die Summe derjenigen Teile, in denen die Schwankung $\Delta_i = g_i - l_i$ oberhalb einer gegebenen Grenze σ liegt, beliebig klein gemacht werden kann. Es folgt hieraus zunächst, dafs jede auf $a \dots b$ stetige Function integrirbar ist, und dafs andererseits eine auf $a \dots b$ total unstetige Function nicht integrirbar sein kann. Es bedürfen daher nur die punktweise unstetigen Functionen einer näheren Untersuchung. Aber auch für sie führt die Riemann'sche Bedingung einfach zu dem bezüglichen Resultat, nämlich zu dem folgenden:

I. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrirbarkeit der endlichen Function $f(x)$ im Intervall $a \dots b$ besteht darin, dafs für jedes k die Stellen, deren Unstetigkeitsgrad $\omega \geqq k$ ist, eine unausgedehnte Menge K bilden.

Der Beweis dieses Satzes beruht im wesentlichen auf der Thatsache, dafs ein Intervall τ, das einschliefslich der Endpunkte von Punkten $\omega \geqq k$ frei ist, in eine endliche Anzahl von Teilintervallen zerlegt werden kann, in denen die Schwankung Δ der Function unterhalb k liegt[2]). Ist nun K eine unausgedehnte Menge, und ist $D = \{\delta_\nu\}$ die Menge der der Gröfse nach geordneten punktfreien Intervalle, so ersetze man zunächst jedes Intervall δ_i durch ein ganz in seinem Innern liegendes Intervall δ_i', das δ_i beliebig nahe kommt. Alsdann kann man eine endliche Anzahl $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_\nu$ dieser Intervalle so bestimmen, dafs

$$\tau - \sum_1^\nu \delta_i' < \varepsilon$$

1) Diese Formulirung erscheint zuerst bei Darboux (Ann. de l'Ec. Norm. (2) Bd. 4, S. 79), vgl. auch St. Smith, Proc. of the Lond. math. Soc. 6, S. 152 (1875), sowie Ascoli, Mem. dell' Acad. dei Lincei (2) II, S. 863 (1875).

2) Dieser für die vorliegenden Anwendungen wichtige Satz kann als unmittelbare Folge des Heine-Borel'schen Theorems von S. 51 betrachtet werden, da ja jedem Punkt auf $a \dots b$ ein endliches Intervall entspricht, in dem $\Delta < k$ ist.

ist, wo ε beliebig gegeben ist. Diese Intervalle lassen sich nun wieder dem obigen Satz gemäfs in eine endliche Zahl von Intervallen teilen, in denen $\Delta < k$ ist. Durch Tilgung der Intervalle δ_i' bleibt alsdann auf τ eine endliche Anzahl von Intervallen δ_i'' übrig, in denen $\Delta \geqq k$ ausfallen kann, und deren Summe ist kleiner als ε. Damit ist bewiesen, dafs die Bedingung hinreichend ist. Dafs sie notwendig ist, ist ohne weiteres klar[1]).

Der vorstehende Satz ist seinem wesentlichen Inhalt nach schon lange bekannt und in den einschlägigen Darstellungen verschiedentlich zu finden[2]). In der vorstehenden Form, die den Inhaltsbegriff benutzt, findet er sich zuerst bei Harnack[3]) und Volterra[4]). Wie oben erwähnt, hatte ihn auch Hankel[5]) zu erreichen gesucht, jedoch vergeblich; er glaubte beweisen zu können, dafs jede punktweise unstetige Function integrirbar sei[6]).

2. Aus dem vorstehenden Satz fliefst eine Reihe wichtiger Folgerungen.

1) Sei zunächst $\psi(x)$ eine auf $a \dots b$ integrirbare Function, die an allen Stetigkeitspunkten den Wert Null hat, so folgt zunächst, dafs ihr unteres Integral gleich Null ist, und damit auch das Integral selbst.

2) Ist $f(x)$ eine beliebige punktweise unstetige und integrirbare Function, so setzen wir wieder

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

wo $\varphi(x)$ die zu $f(x)$ gehörige möglichst stetige Function ist (S. 134). Alsdann ist, wie a. a. O. bewiesen, $k_\varphi \leqq k$ und $k_\psi \leqq k$, und es sind daher $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ebenfalls integrirbar. Nun ist, wie eben erwähnt, das Integral von $\psi(x)$ gleich Null, also folgt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx; \quad \text{d. h.}$$

II. Das Integral einer integrirbaren Function $f(x)$ ist

1) Man sieht, dafs hier nur derjenige Inhaltsbegriff in Frage kommt, der mit einer endlichen Anzahl von Teilintervallen operirt und die Grenzpunkte einer Menge ihr hinzurechnet. Vgl. die Ausführungen auf S. 88.

2) Für die bezügliche Litteratur verweise ich auf Dini, Grundlagen, S. 330, Anm.

3) Die Elemente etc., S. 262; vgl. auch Math. Ann. 19, S. 242.

4) Giorn. di mat. 19, S. 333.

5) Math. Ann. 20, S. 87.

6) Die meisten bislang bekannten Beispiele unstetiger integrirbarer Functionen sind solche, bei denen jede Menge K der Punkte $\omega \geqq k$ endlich ist. Man vgl. z. B. Dini, Grundlagen etc., S. 344, Volterra, Giorn. di mat. 19, S. 333, Darboux, Ann. de l'Ec. norm. (2) Bd. 4, S. 92 ff. Dini bemerkt auch, dafs die Unstetigkeiten belanglos sind, wenn sie eine Menge erster Gattung bilden (a. a O. S. 332 u. 338).



gleich dem Integral der zu ihr gehörigen möglichst stetigen Function $\varphi(x)$.

Die in diesem Satz ausgesprochene evidente Thatsache ist jedoch nicht der eigentliche Zielpunkt des Satzes. Es steht nun aber nichts im Wege, die Function $\varphi(x)$ wieder so aufzufassen (S. 134), dafs sie an einer Unstetigkeitsstelle x' mehrwertig oder unendlich vieldeutig ist, indem man ihr dort irgend einen Wert der Unstetigkeitsstrecke x' beilegt, und es scheint mir nützlich, von vornherein diese Auffassung einzuführen. Einerseits ist es ja für den Integralwert gleichgiltig, welchen dieser möglichen Werte wir der Function $\varphi(x)$ beilegen, andererseits besitzt aber diese Festsetzung für verschiedene Betrachtungen einen gewissen formalen Vorzug. Der Sache nach ist sie auch bereits bei anderen Autoren da zu finden, wo sie sich als eine naturnotwendige Festsetzung von selbst eingestellt hat; ich verweise hierfür z. B. auf du Bois[1]), Hölder[2]) und Arzelà[3]).

3) Die erste der obigen Folgerungen läfst sich umkehren. Wenn nämlich für jedes x im Intervall $a \dots b$

$$\int_a^x f(x)\,dx = 0$$

ist, so ist, wenn x_1 und x_2 beliebige Punkte des Intervalls sind, auch

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = 0.$$

Hieraus folgt nun, dafs $\varphi(x) = 0$ ist für jedes x, wo wieder $\varphi(x)$ die zu $f(x)$ gehörige möglichst stetige Function ist. Denn wäre in einem Stetigkeitspunkt x' etwa $\varphi(x') > 0$, so gäbe es auch ein x' umgebendes Intervall $x_1 \dots x_2$, so dafs in ihm $\varphi(x) > 0$ wäre, was der obigen Gleichung widerspricht. Es ist also $f(x)$ eine Nullfunction. Nennen wir noch eine Function $f(x)$, wie die eben betrachtete, eine Function vom Integral Null oder eine integrirbare Nullfunction, und beachten, dafs die Function $f(x)$ diese Eigenschaft behält, wenn man ihre Werte an den Unstetigkeitspunkten durch die entgegengesetzten ersetzt, so folgt:

III. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Function $f(x)$ auf $a \dots b$ ein überall verschwindendes Integral besitzt, besteht darin, dafs die Punkte,

1) z. B. Journ. f. Math. 94, S. 278/279.
2) Math. Ann. 24, S. 186.
3) Mem. dell' Acc. di Bologna (5) Bd. 2, S. 133.

an denen $|f(x)| \geqq k$ ist, für jedes k eine Menge vom Inhalt Null bilden[1]).

Auf die Bedeutung dieser Functionen für das bestimmte Integral hat zuerst Dini und nach ihm Harnack hingewiesen[2]). Bei ihnen findet sich auch bereits die weitere Folgerung, dafs zwei Functionen, die auf $a \ldots b$ dasselbe Integral liefern, sich nur um eine integrirbare Nullfunction unterscheiden können, und umgekehrt[3]). Dies gilt übrigens auch für das obere und untere Integral, da es eine allgemeine Eigenschaft eines aus Summanden bestehenden Grenzwerts ist, unabhängig davon, was dieser Grenzwert bedeutet[4]).

4) Aus dem Satz I fliefsen auch einige speciellere Sätze, die ich anführen will[5]), und zwar die folgenden:

IV. Eine Function $f(x)$, die in einem Intervall $a \ldots b$ nur gewöhnliche Unstetigkeiten oder Unstetigkeiten zweiter Art nur links oder rechts besitzt, ist integrirbar.

V. Wenn im Intervall $a \ldots b$ die Stellen, an denen die vordere (oder hintere) Schwingung von $f(x)$ oberhalb k liegt, eine unausgedehnte Menge bilden, so ist die Function integrirbar.

Der erste Satz stammt von Dini[6]) und ist eine Folge der Formel

$$K = R + S,$$

wo S perfect ist. Eine perfecte Menge enthält nämlich sowohl linke als rechte Grenzpunkte, es mufs daher im vorliegenden Fall $S = 0$ sein, woraus folgt, dafs die Menge K für jedes k abzählbar ist und daher den Inhalt Null hat. Ein specieller Fall von ihm besagt, dafs $f(x)$ integrirbar ist, falls überall ein vorderer (oder hinterer) Grenzwert existirt. Der zweite Satz findet sich bei Pasch[7]); er ist

1) Vgl. Ascoli, Ann. di mat. (2) 7, S. 261, und Pasch, Math. Ann. 30, S. 151. Ein Satz von du Bois besagt, dafs wenn $f(x)$ eine Function vom Integral Null ist, auch $g(x)f(x)$ es ist, wenn $g(x)$ überall endlich und das Product integrirbar ist. In der That bilden die Stetigkeitspunkte von $f(x)g(x)$ eine Teilmenge derjenigen von $f(x)$, und da in ihnen $f(x) = 0$ ist, so ist es auch das Product. Vgl. Math. Ann. 15, S. 302.

2) Beispiele solcher Functionen finden sich auch früher schon; vgl. z. B. Thomae, Einleitung, S. 14 ff.

3) Die oben (S. 141 Anm.) erwähnte, von Volterra eingeführte Function der Sprünge ist von ihm ursprünglich für die Zwecke der Integralrechnung construirt worden. Mit ihrer Hilfe nimmt der obige Satz den Ausdruck an, dafs $f(x)$ und ihre Function der Sprünge auf $a \ldots b$ zugleich integrirbar oder nicht integrirbar sind. Vgl. Giorn. di mat. 19, S. 82.

4) Vgl. hierzu auch Volterra, Giorn. di mat. 19, S. 333 ff. (1881).

5) Ich erwähne, dafs auch Summe und Product integrirbarer Functionen integrirbar sind. Einen allgemeineren Satz dieser Art gab du Bois, Math. Ann. 16, S. 112 u. 20, S. 122.

6) Grundlagen etc. § 187, 4.

7) Vgl. Math. Ann. 30, S. 148 (1887).

eine unmittelbare Folge des obigen Hauptsatzes. Ist nämlich für einen Punkt x die vordere oder hintere Schwingung gröfser als k, so ist für ihn sicher auch $\omega > k$; die Menge dieser Punkte x ist daher nur eine Teilmenge von K.

3. Wenn die Function $f(x)$ in einem Punkt ξ bestimmt unendlich ist oder doch bei Annäherung an ihn über alle Grenzen wächst, so soll er als ein Unendlichkeitspunkt oder als Unstetigkeitspunkt $\omega = \infty$ bezeichnet werden. Da jeder Grenzpunkt von Punkten $\omega = \infty$ selbst ein solcher Punkt ist, so haben wir zunächst den Satz:

VI. Die Unstetigkeitspunkte $\omega = \infty$ einer Function $f(x)$ bilden in jedem Intervall eine abgeschlossene Menge.

Der Inhalt der von Cauchy stammenden Formulirung, die den Integralbegriff auf Functionen $f(x)$ mit Punkten $\omega = \infty$ auszudehnen gestattet, ist der folgende. Es sei $f(x)$ innerhalb des Intervalls $a \ldots b = \delta$ überall endlich und integrirbar, während die Punkte a oder b oder auch beide Unendlichkeitspunkte sind, und man setze zur Abkürzung

$$(1) \qquad \int_{x'}^{x_1'} f(x)\,dx = J(x', x_1') = J(\delta'),$$

wo δ' das Intervall $x' \ldots x_1'$ bedeutet; ferner sei

$$(2) \qquad \delta', \delta'', \ldots \delta^{(\lambda)}, \ldots$$

eine Fundamentalreihe von Intervallen, die von innen gegen δ convergiren. Falls dann die Integrale

$$(3) \qquad J(\delta'), J(\delta''), \ldots J(\delta^{(\lambda)}), \ldots$$

für jede Reihe (2) eine und dieselbe Fundamentalreihe bilden, so definirt man den durch sie dargestellten Grenzwert $J(\delta)$ als uneigentliches Integral und setzt

$$(4) \qquad J(\delta) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ferner bezeichnet man nach du Bois das Integral als absolut convergent, falls auch die Function $|f(x)|$ ein uneigentliches Integral besitzt, hingegen als bedingt convergent, falls dies nicht der Fall ist[1]).

Wir nehmen nun an, dafs auch innerhalb des Intervalles $a \ldots b$

1) Journ. f. Math. 69, S. 73, Anm. Die singulären Integrale Cauchy's bleiben hier aufser Betracht. Auch beschränke ich mich im folgenden durchweg auf endliche Intervalle $a \ldots b$. Über die Ausdehnung auf unendliche Intervalle vgl. besonders de la Vallée Poussin, Journ. de math. (4) Bd. 8, S. 401.

Punkte $\omega = \infty$ enthalten sind, und fragen, welcher Art die von ihnen gebildete Menge K_∞ sein darf, damit von einem bestimmten Integral noch die Rede sein kann. Dies soll nach zwei verschiedenen Methoden untersucht werden; ich erwähne sie beide, da die ihnen entsprechenden Integralbegriffe nicht durchweg die gleichen Eigenschaften besitzen (S. 213).

Man kann zunächst so vorgehen, dafs man die obige Definition allmählich auf Mengen höherer Art ausdehnt; zunächst so, dafs innerhalb $a \ldots b$ noch ein weiterer Punkt $\omega = \infty$ liegt. Teilt er das Intervall δ in δ_1 und δ_2, und existiren die Integrale $J(\delta_1)$ und $J(\delta_2)$, so existirt auch ihre Summe, und wir definiren

$$J(\delta) = J(\delta_1) + J(\delta_2).$$

Dieser Definition gemäfs ist der Wert $J(\delta)$ davon unabhängig, in welcher Weise die Intervalle $\delta_1^{(\lambda)}$ gegen δ_1 resp. die Intervalle $\delta_2^{(\lambda)}$ gegen δ_2 convergiren. Sie gestattet überdies die Anwendung des Schlusses von ν auf $\nu + 1$. Sie gestattet aber auch die Anwendung des Schlusses von $\{\nu\}$ auf ω, resp. von $\{\alpha_\nu\}$ auf α_ω. Falls nämlich zunächst die Menge K_∞ nur einen einzigen Grenzpunkt γ besitzt, so umgeben wir ihn mit einem kleinen Intervall ε_i, und es sei δ_i das Restintervall von $a \ldots b = \delta$. Dieses Intervall enthält alsdann nur eine endliche Zahl von Punkten der Menge K_∞, und es läfst sich darauf die obige Definition anwenden. Sind nun wieder

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_\nu, \ldots \tag{5}$$

Intervalle, die gegen γ convergiren, und convergiren die Integrale[1])

$$J(\delta_1), J(\delta_2), J(\delta_3), \ldots J(\delta_\nu), \ldots$$

für alle möglichen Folgen (5) gegen einen festen Grenzwert $J_\omega(\delta)$, so definiren wir ihn als das bezügliche bestimmte Integral, so dafs

$$J_\omega(\delta) = \int_a^b f(x)\,dx$$

ist. So kann man weitergehen und die Integraldefinition auf jede Menge K_∞ ausdehnen, die abzählbar ist; man erhält immer die Möglichkeit eines schliefslichen Integralwertes $J_\alpha(\delta)$. Andererseits reicht aber auch dieses Verfahren über abzählbare Mengen K_∞ nicht hinaus.

Die Möglichkeit von Integralen, bei denen die Menge K_∞ nicht endlich ist, sondern bereits Grenzpunkte erster, zweiter oder ν-ter Ordnung besitzt, dürfte zuerst du Bois[2]) in Betracht gezogen haben;

---

1) Natürlich ist vorauszusetzen, dafs jedes Integral $J(\delta_i)$ existirt.

2) Vgl. Journ. f. Math. 79, S. 36 u. 45 (1875).

eine präcise Darstellung, die mit dem Vorstehenden in der Sache übereinstimmt, findet sich jedoch erst im Lehrbuch Dini's. Allerdings ist auch Dini, wie er dies auch sonst vielfach thut, über Mengen erster Gattung (S. 60) nicht hinausgegangen. Übrigens gelten die getroffenen Festsetzungen sowohl für absolut convergente, wie für bedingt convergente Integrale[1]. Integraldefinitionen für den Fall, dafs K_∞ nicht abzählbar ist, haben erst Harnack und später de la Vallée Poussin gegeben. Auch C. Jordan hat ihnen in seinem Cours einen breiteren Spielraum eingeräumt.

4. Die Definition Harnack's lautet[2]:

Ist die Menge K_∞ unausgedehnt, ist $D = \{\delta_\nu\}$ die zu ihr gehörige Intervallmenge, ist $\delta_\nu' = x_\nu' \cdots x_\nu''$ ein innerhalb δ_ν gelegenes Teilintervall, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines uneigentlichen Doppelintegrals darin, dafs die Summe

$$\int_{x_1'}^{x_1''} f(x)dx + \int_{x_2'}^{x_2''} f(x)dx + \cdots + \int_{x_\nu'}^{x_\nu''} f(x)dx,$$

während unabhängig von einander jedes δ_ν' gegen δ_ν und ν gegen ∞ convergirt, einen festen endlichen Grenzwert besitzt.

Aus dieser Definition folgt, dafs auch für jedes einzelne Intervall δ_ν ein uneigentliches Integral existirt; und daraus ersieht man leicht, dafs sie die vorher gegebene, die sich auf abzählbare Mengen K_∞ bezieht, als speciellen Fall enthält. Die Definition ist überdies identisch mit der Festsetzung, dafs auch die Summe derjenigen Integrale gegen den Grenzwert convergiren soll, die nach Ausschlufs der Punkte von K_∞ durch beliebige Teilintervalle vom Gesamtintervall übrig bleiben[3]. In dieser Form findet sich die Definition bei C. Jordan, nur fehlt bei ihm die Bedingung, dafs K_∞ unausgedehnt ist, was auf einer zufälligen Unterlassung beruhen dürfte[4].

1) Beispiele bedingt convergenter Integrale erwähnt Ascoli, Mem. dell' Acc. dei Lincei (3) 2, S. 610 ff. und Ann. di mat. (2) 6, S. 41. Vgl. auch S. 205 dieses Berichts, Anm. 1.

2) Math. Ann. 24, S. 220.

3) Man kann dies auch so ausdrücken, dafs die Beiträge, die den Umgebungen der Punkte von K_∞ entsprechen, gegen Null convergiren; vgl. Dini, Grundlagen etc. S. 413. Die Gleichwertigkeit aller dieser Bestimmungen ist eine unmittelbare Folge der Grundeigenschaften der Fundamentalreihe. Ein ausführlicher Nachweis dieses Thatbestandes ist von Stolz gegeben worden; Ber. d. Wien. Akad. Bd. 107, S. 207 (1898).

4) Vgl. cours. etc. S. 50. Dagegen ist die bezügliche Bedingung bei der Definition des uneigentlichen Doppelintegrals vorhanden und steckt in der Forderung, dafs das Integrationsgebiet E mefsbar sein soll (a. a. O. S. 76). Die Jordan'sche Definition hat auch Stolz übernommen. Die

Auf wesentlich anderer Grundlage ruht der Grenzprocefs, vermöge dessen de la Vallée Poussin[1]) das uneigentliche Integral definirt. Er setzt zunächst ebenfalls fest, dafs $J(K_x) = 0$ ist, und definirt alsdann folgendermafsen:

Bildet man aus $f(x)$ eine Function $f_1(x)$, indem man überall, wo $f(x) < -M_1$ ist, $f(x)$ durch $-M_1$ ersetzt, ebenso überall, wo $f(x) > N_1$ ist, $f(x)$ durch N_1, und hat dann die für $\lim M_\nu = \infty$ und $\lim N_\nu = \infty$ gebildete Reihe

$$(6) \qquad f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots f_\nu(x), \ldots$$

die Eigenschaft, dafs, wie auch M_ν und N_ν gegen ∞ convergiren, jedes $f_\nu(x)$ integrirbar ist, und die zugehörigen Integrale eine Folge bilden, so heifst $f(x)$ integrirbar.

Während also die Definition Harnack's den Grenzübergang so vornimmt, dafs die Function unverändert bleibt, während die Intervalle convergiren, so wird hier das Intervall festgehalten, während man die Function durch eine gegen sie selbst convergirende Folge ersetzt. Übrigens gelangt man auf diese Weise nur zu den unbedingt convergenten Integralen. Da nämlich M_ν und N_ν unabhängig voneinander unendlich werden dürfen, so hat auch $|f(x)|$ ein Integral.

5. Aus der Definition de la Vallée Poussin's kann die Eigenschaft von K_∞, unausgedehnt zu sein, gefolgert werden. Hierin erblicke ich einen wesentlichen Vorzug dieser Definition; man mufs auch verlangen können, dafs eine so notwendige Eigenschaft des Integralbegriffs in der Definition von selbst enthalten ist, und nicht erst einer besonderen Festsetzung bedarf. De la Vallée Poussin hat dies allerdings selbst nicht bemerkt, da auch er K_∞ von vornherein als unausgedehnt vorschreibt; bei der methodischen Wichtigkeit des Sachverhalts glaubte ich jedoch darauf hinweisen zu sollen und lasse einen kurzen Beweis hier folgen.

Die Definition besagt, dafs jedes $f_\nu(x)$ integrirbar ist, und dafs die Integrale eine Folge bilden. Wird noch

$$F_\nu(x) = f_{\nu+1}(x) - f_\nu(x)$$

gesetzt, so ist hierzu hinreichend und notwendig, dafs

$$\lim_{\nu=\infty} \int F_\nu(x)dx = 0$$

ist, und hieraus folgt, dafs auch das obere Integral von $F_\nu(x)$ gegen Null convergirt. Ist nun die Menge T ausgedehnt, so kann zwar

---

Bedingung $J(K_\infty) = 0$ fehlt übrigens auch in dem bezüglichen Artikel der Encykl. d. math. Wiss. II, 1, S. 138, der die Jordan'sche Definition übernommen hat.

1) Journ. de math. (4) 8, S. 427 u. 453.

jedes $f_\nu(x)$ integrirbar sein, aber das obere Integral von $F_\nu(x)$ convergirt nicht gegen Null. Beschränkt man sich zunächst auf den Fall, dafs $f_\nu(x)$, also auch $F_\nu(x)$ überall positiv ist, und wird das Intervall $a \ldots b = \tau$ irgendwie in Teilintervalle $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\varrho$ zerlegt, so hat die Schwankung von $F_\nu(x)$ in jedem Intervall τ_i, in dem ein Punkt ξ von K_∞ liegt, stets den Wert $N_{\nu+1} - N_\nu$. Sind nun $\tau_1', \tau_2', \ldots \tau_\mu'$ diejenigen Intervalle, die keinen Punkt von T enthalten, und $\tau_1'', \tau_2'', \ldots \tau_\lambda''$ die übrigen, so ergiebt sich für das obere Integral von $F_\nu(x)$ die Relation[1])

$$\overline{\int} F_\nu(x)\,dx = (\tau_1'' + \tau_2'' + \cdots + \tau_\lambda'')(N_{\nu+1} - N_\nu).$$

Falls nun T ausgedehnt ist und den Inhalt σ hat, so ist immer $\sigma < (\tau_1'' + \cdots + \tau_\lambda'')$ und damit

$$\overline{\int} F_\nu(x)\,dx > \sigma(N_{\nu+1} - N_\nu),$$

woraus die Behauptung folgt. Ganz ebenso wird der Beweis geführt, falls $f(x)$ auch negativ unendlich werden kann, da ja M_ν und N_ν unabhängig von einander wachsen dürfen.

Die Harnack'sche Definition gestattet diese Folgerung nicht[2]). Umgekehrt sieht man leicht, dafs die in ihr geforderte Grenzeigenschaft bei den hier erörterten absolut convergenten Integralen eine Folge der Definition de la Vallée Poussin's ist.

Je nachdem die Menge K_∞ abzählbar ist oder nicht, soll das uneigentliche Integral als solches erster Art oder zweiter Art bezeichnet werden. Beide Integralarten weisen wesentliche Differenzpunkte auf (S. 214).

6. Da de la Vallée Poussin's allgemeine Definition nur zu den unbedingt convergenten Integralen führt, so mufs er sich für die bedingt convergenten auf die erste Art der Definition beschränken, die nur zu abzählbaren Mengen K_∞ führt; dabei wird $f(x)$ auf jedem Intervall δ_ν integrirbar oder auch absolut convergent vorausgesetzt.

Wir werden sehr bald zu erörtern haben, ob es überhaupt angängig ist, die bedingt convergenten Integrale beizubehalten. Thut man dies aber, so wird eine derartige principielle Unterscheidung zwischen den absolut und bedingt convergenten Integralen durch die Natur der Sache meines Erachtens nicht verlangt. Besitzt nämlich die Function $f(x)$ auf $a \ldots b$ ein bedingt convergentes

---

1) Die Bezeichnung $\overline{\int}$ entnehme ich Peano.

2) Ist T ausgedehnt, und wird $f(x)$ so bestimmt, dafs $f(x) = \infty$ in T und $f(x) = 0$ in jedem andern Punkt, so hat der bezügliche Harnack'sche Grenzwert immer noch den Wert Null.

Integral, so kann man sich den Zusammenhang der Intervalle δ_ν an allen Stellen von K_∞ zerschnitten denken und die Intervalle in anderer Weise zusammensetzen, so dafs sie eine ebenfalls abzählbare Menge K'_∞ bestimmen. Wenn man dabei die Functionswerte in jedem inneren Punkt jedes Intervalles δ_ν ungeändert läfst, so hat die Function $f(x)$ ihre Form geändert, aber ihr Integral ist unverändert geblieben. Nichts hindert aber, die Intervalle δ_ν sogar so anzuordnen, dafs sie eine im Intervall $a \dots b$ liegende unausgedehnte perfecte Menge T_∞ bestimmen. Um dies ganz einwandsfrei zu bewirken, kann man von einer Menge T_∞ ausgehen, deren Inhalt Null ist, und die zu ihr gehörigen Intervalle dann so aneinanderfügen, dafs ihre Endpunkte in einem Intervall $a' \dots b'$ eine abzählbare Menge K_∞ bestimmen, wo dann $a \dots b = a' \dots b'$ ist. Falls nun eine Function $f(x)$ auf $a' \dots b'$ ein bedingt convergentes Integral besitzt, so liegt kein Grund vor, derjenigen Function $f_1(x)$, die sich aus $f(x)$ durch Umlagerung der Intervalle ergiebt, die Existenz eines Integrals auf alle Fälle vorenthalten zu wollen. Es scheint dies um so weniger geboten, als die Definition von de la Vallée Poussin sich so abändern liefse, dafs sie den vorliegenden Fall mitumfafste und ebenfalls die Eigenschaft $J(K_\infty) = 0$ aus ihr gefolgert werden könnte; sie müfste allerdings so erweitert werden, dafs man die Existenz des Integrals auf jedem δ_ν voraussetzt, da dies hier nicht mehr als Folge aus der Definition abgeleitet werden kann. Allein da wir die Existenz des bedingt convergenten Integrals später ganz und gar in Zweifel ziehen müssen, so nehme ich davon Abstand, dies noch weiter auszuführen.

7. Die einzelnen Eigenschaften des bestimmten Integrals lassen sich nur teilweise auf die uneigentlichen Integrale übertragen. Jedenfalls gilt dies aber von der Ersetzbarkeit der Function $f(x)$ durch die zugehörige Function $\varphi(x)$. Setzt man wieder

$$f_\nu(x) = \varphi_\nu(x) + \psi_\nu(x), \quad f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

so ist nämlich

$$\lim \varphi_\nu(x) = \varphi(x),$$

wie unmittelbar daraus folgt, dafs es für jeden Stetigkeitspunkt von $f(x)$, resp. $\varphi(x)$ ein bestimmtes ν giebt, so dafs er zugleich Stetigkeitspunkt von $f_\nu(x)$ resp. $\varphi_\nu(x)$ ist und es für alle folgenden Functionen der Folge (6) auch bleibt. Demgemäfs folgt, dafs nicht allein

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

ist, sondern dafs auch die Integrale

$$(7) \qquad \int_a^b \varphi_1(x)dx, \quad \int_a^b \varphi_2(x)dx, \ \ldots \int_a^b \varphi_\nu(x)dx, \ \ldots$$

gegen das Integral von $f(x)$ convergiren. Auch hier ist es wieder nützlich, für $\varphi_\nu(x)$ und $\varphi(x)$ die Bedingung der ausnahmslosen Einwertigkeit aufzuheben und an den Unstetigkeitsstellen jeden Wert der zugehörigen Unstetigkeitsstrecke als Wert dieser Functionen zuzulassen. Es folgt nun weiter, dafs auch

$$\lim \psi_\nu(x) = \psi(x)$$

ist, und es ist daher auch $\psi(x)$ eine Nullfunction, deren Integral gleich Null ist. Ferner bestehen auch hier zwischen k, k_φ und k_ψ die S. 133 angegebenen Beziehungen.

Was die besonderen Integralsätze betrifft, so sind die meisten von ihnen bereits im Werk von Dini eingehend dargestellt worden[1]. Sie sind überdies zumeist eine ziemlich unmittelbare Folge der Integraldefinition und bieten zu Fragen principieller Natur keine Veranlassung. Der Satz, dafs das Product zweier integrirbaren Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ selbst integrirbar ist, bleibt für die absolut convergenten Integrale immer in Kraft, falls beide Functionen keine gemeinsamen Unendlichkeitspunkte besitzen. Für bedingt convergente Integrale existirt jedoch ein solcher Satz allgemeinerer Tragweite überhaupt nicht mehr. Hier braucht er selbst dann nicht mehr erfüllt zu sein, wenn eine der beiden Functionen stets endlich ist[2]. Ähnlich steht es mit dem Mittelwertsatz.

Was den Fall der teilweisen Integration betrifft, so können schon in dem Fall, dafs $f(x)$ und $\varphi(x)$ eigentlich integrirbar sind, Formeln auftreten, die uneigentliche Integrale enthalten. Hiermit haben sich Dini und de la Vallée Poussin eingehend beschäftigt. Ich beschränke mich auf die Hervorhebung der allgemeinen Gesichtspunkte. Ist $Df(x)$ eine Ableitung von $f(x)$, so ist zunächst notwendig, dafs $Df(x)$ eine integrirbare Function ist, aus der durch Integration wieder $f(x)$ hervorgeht, und analog für $\varphi(x)$. Wir werden sehen (S. 210), dafs dies nicht immer der Fall zu sein braucht, und selbst dann nicht, wenn die Ableitung $Df(x)$ eine stets endliche Function ist. Ist aber diese Bedingung für irgend eine Ableitung erfüllt, so gilt sie für jede, und wenn überdies auch $\varphi(x)\,Df(x)$

1) Vgl. besonders § 225ff. Vgl. auch Ascoli, Mem. dell' Acc. dei Lincei (3) Bd. 2, S. 610ff., sowie Hölder, Math. Ann. 24, S. 203.

2) Ist $\int f(x)$ ein bedingt convergentes Integral, so entsteht $|f(x)|$ durch Multiplication von $f(x)$ mit einer Function vom Wert ± 1, die integrirbar ist, während $|f(x)|$ nicht integrirbar ist. Vgl. z. B. das S. 205 erwähnte Beispiel.

oder aber $f(x)\,D\varphi(x)$ integrirbare Functionen sind, so läfst sich die Formel der teilweisen Integration anwenden[1]).

Auch die Frage der Substitution neuer Variablen ist von den beiden genannten Autoren a. a. O. ausführlich behandelt worden[2]).

8. Die im zweiten Abschnitt in Kürze dargestellte Theorie der ebenen resp. räumlichen abgeschlossenen Mengen erlaubt es, die vorstehenden Erörterungen ohne weiteres auf Doppelintegrale und vielfache Integrale auszudehnen. Beruht doch der Integralbegriff aufser auf der Zerlegung eines Gebiets in eine endliche unbegrenzt wachsende Zahl einfacher Bereiche nur noch auf den allgemeinen Eigenschaften des einfachen Grenzwerts[3]) und der Structur und den Inhaltseigenschaften der Punktmengen. Es scheint mir sogar gerade eines der wesentlichsten Ergebnisse der Mengenlehre zu sein, dafs sie die in diesen Dingen vorhandene Analogie zwischen dem linearen und dem räumlichen Gebiet methodisch sicherzustellen vermocht hat.

Freilich sollte, da das Integrationsgebiet ein beliebiges Flächenstück oder ein beliebiger Raumteil sein kann, zuvor eine mengentheoretische Analyse der geometrischen Grundbegriffe vorhanden sein. Ich hoffe eine solche bald liefern zu können; man kommt aber auch ohne sie mit einem einfachen Kunstgriff zurecht. Beschränken wir uns für das Folgende auf das Doppelintegral einer Function $f(x, y)$, so denke man sich das Integrationsgebiet $\mathfrak{J}$ in einem Rechteck H liegend, erteile der Function in allen Punkten, die aufserhalb $\mathfrak{J}$ liegen, den Wert Null und wähle nun H selbst für die so modificirte Function $f_1(x, y)$ als zugehöriges Integrationsgebiet. Es ergiebt sich dann auf demselben Wege und mittelst derselben Schlüsse, wie oben (S. 180), dafs die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Doppelintegrals der Function $f_1(x, y)$ darin besteht, dafs für jedes $k > 0$ die Menge K_1 der Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq k$ den Inhalt Null hat. Der Menge K_1 können nun allerdings einige oder alle Punkte des Umfangs von $\mathfrak{J}$ angehören. Wird dieser Umfang als Punktmenge durch L bezeichnet, und ist K die Menge der Punkte $\omega \geqq k$ für $f(x, y)$, so ist jedenfalls (S. 92)

$$J(K) \leqq J(K_1) \leqq J(K) + J(L),$$

und wenn $J(L) = 0$ ist, so ist auch $J(K) = J(K_1)$. Unsere Methode ist also immer dann ohne Einflufs, wenn $J(L) = 0$ ist; eine Bedingung, die verlangt, dafs das Gebiet $\mathfrak{J}$ mefsbar ist, und

1) Ist es das eine Product, so ist es auch das andere; vgl. Dini, Grundlagen, S. 489.

2) Vgl. auch Harnack, Math. Ann. 24, S. 237.

3) Die Ausdehnung der Riemann'schen Definition auf Doppelintegrale erscheint wohl zuerst bei J. Thomae, Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale 1875, S. 33, sowie Zeitschr. f. Math. 21, S. 224, und bei St. Smith, Proc. of the Lond. math. Soc. 6, S. 152 (1875).

die als solche hier ausdrücklich eingeführt werden mufs. Sie haftet aber auch sonst dem Integralbegriff als immanente Bedingung an. Also folgt:

VII. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die überall endliche Function $f(x, y)$ in dem mefsbaren Gebiet $\mathfrak{J}$ ein Doppelintegral besitzt, besteht darin, dafs die Menge K der Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq k$ für jedes k den Inhalt Null besitzt.

Es schliefst dies natürlich nicht aus, dafs der Menge K auch ganze Curven angehören können, ja sogar unendlich viele, und selbst so, dafs ihre Menge die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ hat. Es leuchtet überdies ein, dafs das vorstehende Resultat auf vielfache Integrale jeder Art ausgedehnt werden kann. Es wurde zuerst von Harnack[1]) und später von O. Stolz[2]) ausgesprochen.

Auch hier kann man wieder zu $f(x, y)$ die möglichst stetige Function $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ einführen durch die Gleichung

$$f(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y),$$

so dafs $\varphi(x, y)$ in den Stetigkeitspunkten von $f(x, y)$ mit $f(x, y)$ übereinstimmt und $\psi(x, y)$ eine Nullfunction ist. Alsdann gelten hier die nämlichen Beziehungen, wie für einfache Integrale, da sie ja sämtlich vom Dimensionsbegriff unabhängig sind. Es ist insbesondere (S. 133) $k_\varphi \leqq k$ und $k_\psi \leqq k$, und es ist

$$\int\!\!\int f(x, y)\,dH = \int\!\!\int \varphi(x, y)\,dH, \quad \int\!\!\int \psi(x, y)\,dH = 0.$$

9. Eine Frage, die noch besonderer Erörterung bedarf, ist die nach der Ersetzung eines vielfachen Integrals durch mehrmalige Integrale. In dieser Hinsicht erwähne ich zunächst den folgenden Satz:

VIII. Hat die Function $f(x, y)$ im Rechteck H ein Doppelintegral, so existiren auch die bezüglichen zweimaligen Integrale und sind unter sich und dem Doppelintegral gleich.

Diesen Satz hat in seiner allgemeinsten Tragweite zuerst P. du Bois-Reymond[3]) als richtig erkannt und bewiesen, auf Grund allgemeiner Betrachtungen über doppelte Grenzwerte. Dieser Weg scheint mir jedoch nicht die einfachste Beweismethode darzustellen[4]). Die natürlichste Grundlage der Schlüsse ist die Benutzung des oberen und unteren Integrals; auf dieser Grundlage ist der Satz

---

1) Die Elemente u. s. w., S. 311.
2) Math. Ann. 26, S. 90.
3) Journ. f. Math. 94, S. 277 (1883).
4) Vgl. die Anmerkung auf S. 199.

zuerst von Harnack[1]) abgeleitet worden. Sein Beweis kommt darauf hinaus, dafs das obere Integral bei zweimaliger Integration nicht gröfser sein kann als das obere Doppelintegral, und ebenso das untere nicht kleiner als das untere Doppelintegral, woraus der Satz unmittelbar folgt. Denselben Beweis giebt auch C. Arzelà[2]). Die hier ausgesprochene präcise Formulirung findet sich allerdings erst bei C. Jordan[3]).

Um den Satz mit den Eigenschaften der Punktmengen zu erweisen, schicke ich zunächst eine allgemeine Orientirung über die Verteilung der Punkte $\omega \geqq k$ einer Menge K voraus. Sei x ein beliebiger Punkt der Seite h_1 von H und K^x die Teilmenge von K, die auf der durch x parallel zur y-Axe gehenden Geraden h^x liegt. Es ist dann, da ein Doppelintegral existirt, $J(K) = 0$, und wir setzen

$$J(K^x) = J_k(x).$$

Wird dann σ beliebig vorgegeben, so ist gemäfs Satz VIII von S. 96 die Menge $X_\sigma = \{x_\sigma\}$ derjenigen Punkte, für die der Inhalt $J_k(x_\sigma) \geqq \sigma$ ist, notwendig unausgedehnt. Dies können wir kurz so aussprechen, dafs $J_k(x)$ eine integrirbare Nullfunction ist, und zwar gilt dies für jedes k. Nun denke man sich eine Reihe von Gröfsen

$$k_1 > k_2 > k_3 > \cdots > k_\nu > \cdots$$

mit $\lim k_\nu = 0$, und es seien

$$J_1(x),\ J_2(x),\ J_3(x),\ \ldots J_\nu(x),\ \ldots$$

die zugehörigen eben definirten Nullfunctionen, so wird die zur Gesamtmenge $\mathfrak{M}\{X_\sigma\}$ gehörige Complementärmenge $\Xi = \{\xi\}$ nunmehr dadurch ausgezeichnet sein, dafs auf jeder durch einen Punkt ξ gehenden Geraden h^ξ

$$J_\nu(\xi) = J_\nu(K^\xi) = 0$$

ist für jedes k_ν. Setzt man also noch $\lim J_\nu(x) = J(x)$, so ist $J(x)$ eine integrirbare Nullfunction allgemeinster Art[4]). Damit haben wir ein hinreichendes Bild der bezüglichen Punktverteilung gewonnen.

Um nun den Beweis des Satzes zu liefern, betrachten wir zunächst wieder einen beliebigen Punkt x der Seite h_1, so besitzt auf der durch ihn gehenden Geraden h^x die Function $f(x, y)$ ein oberes Integral $O(x)$ und ein unteres Integral $U(x)$. Wird durch $F(x)$ irgend ein Wert bezeichnet, der zwischen beiden enthalten ist, so ist zu zeigen, dafs $F(x)$ in dem oben (S. 182) angegebenen Sinn

1) Vgl. Harnack's Ausgabe der Differential- und Integralrechnung von Serret, Bd. 2, S. 282 (1885).
2) Mem. dell' Ist. di Bologna (5) II, S. 133.
3) Journ. de math. (4) Bd. 8, S. 84, sowie cours etc., Bd. 1, S. 42. Den nämlichen Beweis giebt Pringsheim, Ber. d. Münch. Ak. 28, S. 59.
4) Dies ist ein besonderer Fall von Satz II auf S. 225.

eine punktweise unstetige integrirbare Function ist. Zunächst ist nach dem vorigen klar, dafs $f(x, y)$ auf jeder Geraden h^ξ integrirbar und damit $F(\xi)$ eindeutig ist. Wird weiter k und σ beliebig gewählt, ist X_σ wie eben die zugehörige unausgedehnte Menge und x' innerer Punkt eines zu ihr gehörigen Intervalles δ_ν, so ist für die zugehörige Teilmenge K' der Voraussetzung gemäfs $J(K') < \sigma$. Wir haben jetzt nur nötig, die Ausführungen von S. 96 zu wiederholen (Fig. 4). Sei also wieder $E = \{\varepsilon_\nu\}$ die zu K' gehörige Intervallmenge, so bestimme man μ Intervalle ε_i, so dafs bei vorgegebenem σ'

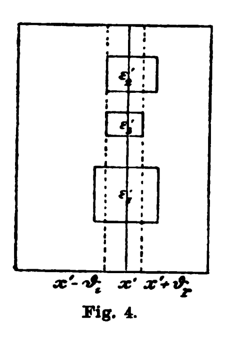


Fig. 4.

$$\varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \cdots + \varepsilon_\mu' > h_2 - \sigma - \sigma'$$

ist. Zu jedem inneren Punkt p von ε_i' giebt es dann wieder einen rechteckigen Bereich, in dem die Schwankung von $f(x, y)$ unterhalb k liegt, und es mufs auch hier die Breite dieser Bereiche für die Punkte aller μ Intervalle ε_i' eine von Null verschiedene untere Grenze haben, da sie sonst einen Punkt von K enthielten. Diese unteren Grenzen ϑ_l und ϑ_r bestimmen dann wieder zu x' ein endliches Intervall $x' - \vartheta_l \cdots x' + \vartheta_r$. Wird nun die Maximalschwankung von $f(x, y)$ in H mit k_m bezeichnet, so ist, wenn x_1 und x_2 zwei innere Punkte des Intervalls $x' - \vartheta_l \cdots x' + \vartheta_r$ sind,

$$\varDelta = |F(x_2) - F(x_1)| < kh_2 + (\sigma + \sigma')k_m.$$

Ein solches Intervall existirt aber um jeden inneren Punkt eines Intervalles δ_ν. Wählt man nun wieder ν so, dafs

$$\delta_1' + \delta_2' + \cdots + \delta_\nu' > h_1 - \sigma_1$$

ist, so kann jetzt die Seite h_1 in eine endliche Zahl von Intervallen τ_i so zerlegt werden, dafs bei vorgegebenem η die Summe derjenigen, in denen $\varDelta < \eta$ ist, ihrerseits unter einer Gröfse η_1 liegt[1]). Dies heifst aber in der That, dafs in dem obigen Sinn (S. 182) $F(x)$ eine integrirbare Function ist, und es bilden insbesondere noch die Punkte von $\Xi = \{\xi\}$ die Stetigkeitspunkte der Function[2]). Damit ist zunächst die Existenz des zweimaligen Integrals bewiesen.

Die Gleichheit des zweimaligen Integrals und des Doppel-

1) Es genügt z. B., $h_2 k < \frac{\eta}{3}$, $\sigma k_m < \frac{\eta}{3}$, $\sigma' k_m < \frac{\eta}{3}$, $\sigma_1 < \eta_1$ zu wählen. Die erste Relation bestimmt die Menge K, die zweite X_σ, die dritte und vierte regeln die Werte von μ und ν, und damit die Zahl der Intervalle τ_i.

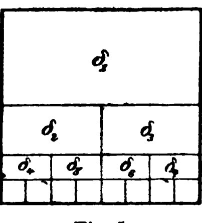
2) Einen speciellen Fall des obigen Satzes giebt C. Severini. Er zeigt, dafs $F(x)$ stetig ist, wenn $J(K^x) = 0$ ist für jedes k und jedes x. Rend. di Palermo 13, S. 7 (1899).

integrals zu erschliefsen, hat nunmehr keinerlei Schwierigkeit und bedarf kaum einer näheren Begründung. Der Erfolg unserer Betrachtung besteht ja darin, dafs wir einerseits Gebietsmengen auf constructivem Wege hergestellt haben, die die Übereinstimmung der für das Doppelintegral und das zweimalige Integral in Betracht kommenden Elementarsummen direct in Evidenz setzen, und dafs andererseits die diesen Gebietsmengen entsprechenden Elementarsummen sowohl dem Wert des Doppelintegrals wie auch dem des zweimaligen Integrals beliebig nahe gebracht werden können. Damit ist die Behauptung erwiesen. Wir dürfen also setzen:

$$\iint f(x, y)\, dH = \int_a^{a_1} F(x)\, dx = \int_a^{a_1} dx \int_b^{b_1} f(x, y)\, dy.$$

Nunmehr können wir noch die Änderung einführen, dafs wir wieder von der Function $F(x)$ zur zugehörigen Function $\Phi(x)$ übergehen, so dafs die Function $\Phi(x)$ durch die Werte von $F(x)$ an den Stetigkeitsstellen ξ bestimmt ist; alsdann ist

$$\iint f(x, y)\, dH = \int_a^{a_1} \Phi(x)\, dx.$$


Fig. 5.

Ich lasse ein einfaches Beispiel folgen. In einem Quadrat über der Längeneinheit (Fig. 5) definire man $f(x, y)$ so, dafs in allen Punkten

$$x = \frac{2\mu + 1}{2^\nu}, \quad y \leqq \frac{1}{2^\nu}$$

$f(x, y) = 1$ ist, sonst aber $f(x, y) = 0$, so ist das Doppelintegral Null, wie die Figur unmittelbar veranschaulicht. Alsdann ist die Integralfunction $F(x)$ eine überall eindeutige, integrirbare Nullfunction, so dafs

$$F\left(\frac{2\mu + 1}{2^\nu}\right) = \frac{1}{2^\nu}$$

ist, und es ist $\Phi(x) = 0$. Wird jetzt $f(x, y)$ so abgeändert, dafs $f(x, y) = 1$ nur an denjenigen der obigen Werte ist, wo y rational ist, so wird

$$0 \leqq F\left(\frac{2\mu + 1}{2^\nu}\right) \leqq \frac{1}{2^\nu},$$

da an diesen Stellen das untere Integral $U(x) = 0$ ist, das obere $O(x) = 1/2^\nu$. Auch jetzt aber ist $\Phi(x) = 0$, und also ist auch das zweimalige Integral Null. Es ist eben ausschliefslich die Function $\Phi(x)$, auf die es für die Ermittelung des Integralwertes ankommt. Diesem Thatbestand hat übrigens auch Arzelà Ausdruck gegeben, der sich

ebenfalls mit der Existenzfrage für Doppelintegrale und das zweimalige Integral beschäftigt hat. Er spricht sich dahin aus, dafs $O(x) - U(x)$ eine Function vom Integral Null und $U(x)$ integrirbar sein müsse, damit das Doppelintegral existiren kann. Allerdings ist diese Bedingung, wie der folgende Satz zeigt, und auch Arzelà angiebt, nicht hinreichend.

Harnack hat in seiner ersten Darstellung des Satzes den Ausdruck gebraucht, dafs bei jedem Doppelintegral die Gesamtmengen $\{X_\sigma\}$ selbst eine unausgedehnte Menge bilden, was ja aber keineswegs nötig ist. Stolz[1]), der dieses Versehen bemerkte, beschränkte sich deshalb darauf, den Satz unter der ausdrücklichen Bedingung abzuleiten, dafs auch $J\{X_\sigma\} = 0$ ist; was jedoch ein zu enges Resultat ergiebt. Auf das Monitum von Stolz hin hat alsbald Harnack[2]) seine Ausdrucksweise richtig dahin corrigirt, dafs $J(X_\sigma) = 0$ für jedes σ sein müsse, und dem Satz seinen allgemeinen Inhalt jedenfalls für den Fall gesichert, dafs das Gebiet H von jeder Parallelen zu den Axen in zwei Punkten getroffen wird.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit erwähnen, dafs auf mancher Seite dem Satz gegenüber eine gewisse Engherzigkeit obwaltet, mindestens in Bezug auf den Sprachgebrauch. Man findet mehrfach die Ausdrucksweise, dafs das zweimalige Integral vorhanden sein könne, ohne dafs das einfache Integral $F(x) = \int f(x, y)\,dy$ existire. Ich halte diesen Sprachgebrauch nicht für zweckmäfsig; er schwindet bei der hier gewählten Begriffsbestimmung von selbst, und ich darf hinzufügen, dafs diese Auffassung auch bei den meisten Autoren vorhanden ist, die sich mit dem Gegenstand beschäftigt haben, allerdings nicht überall. Ich erwähne dies, weil Stolz[3]) so weit gegangen ist, den Begriff des zweimaligen Integrals in diesen Fällen gar nicht zuzulassen, zumal die Punkte x, für die $\int f(x, y)\,dy$ nicht erklärt sei, überall dicht liegen könnten[4]). Aber die überall dichte Erfüllung ist belanglos, da ja die Differenz $O(x) - U(x)$ eine integrirbare Nullfunction allgemeinster Art sein kann, wie auch bei Arzelà zu lesen ist.

Es fragt sich, wann der Satz VIII umkehrbar ist. Diese Frage läfst sich auf Grund der früher bewiesenen Sätze über den Inhalt

1) Math. Ann. 26, S. 93.
2) Math. Ann. 26, S. 566.
3) Grundzüge, III, S. 88, 140. Das Beispiel, auf das Stolz sich beruft, lautet

$$f(x, y) = \frac{1}{2^\nu} \text{ für } x = \frac{2\mu + 1}{2^\nu}, \quad y = \frac{2\varkappa + 1}{2^\lambda},$$

sonst aber $f(x, y) = 0$. Vgl. auch du Bois, Journ. f. Math. 94, S. 278.
4) Auch Pringsheim folgt dem oben bemängelten Sprachgebrauch; z. B. Ber. d. Münch. Ak. 29, S. 39.

ebener Mengen leicht beantworten. Aus diesen Sätzen folgt nämlich unmittelbar:

IX. Gestattet die Function $f(x, y)$ im Rechteck H ein zweimaliges Integral erst nach y und dann nach x, und ist K^x die Menge der Punkte $\omega \geq k$ für irgend eine Parallele zur y-Axe, so besitzt $f(x, y)$ stets und nur dann ein Doppelintegral, wenn die Gesamtmenge $\{K^x\}$, die zu allen den genannten Parallelen gehört, für jedes k abgeschlossen ist.

Ist nämlich die Menge $\{K^x\}$ abgeschlossen, so folgt aus Satz IX von S. 96 unmittelbar, dafs ihr Inhalt Null ist. Denn wird zunächst k und damit K beliebig gewählt, so bewirkt die Existenz des zweimaligen Integrals, dafs die in dem bezüglichen Satz benutzte Menge X_σ für jedes σ unausgedehnt ist, und da $\{K_x\}$ abgeschlossen ist, so besagt dieser Satz, dafs $J\{K^x\} = 0$ ist. Dies gilt aber für jedes k, woraus der obige Satz folgt.

Dafs es Mengen $\{K^x\}$ geben kann, die nicht abgeschlossen sind, wurde bereits S. 97 erwähnt. Man kann also solche Mengen auch so construiren, dafs ein zweimaliges Integral existirt, während ein Doppelintegral nicht vorhanden ist, und zwar derart, dafs die Menge $\{K^x\}$ als ebene Menge einen von Null verschiedenen Inhalt besitzt, während jedes einzelne K^x den Inhalt Null hat[1]. Es beruht dies darauf, dafs beim Inhalt der ebenen Menge alle ihre Grenzpunkte in Frage kommen, für den Inhalt jeder einzelnen Menge K^x nur diejenigen, die auf den Geraden h^x liegen. Beides kann aber sehr verschiedenen Erfolg haben[2].

Mit dem soeben bewiesenen Satz hängt auch die Frage nach der Vertauschbarkeit der Integrationsordnung zusammen, obwohl sie mit ihm nicht identisch ist. Es können nämlich die Mengen K^x eine solche Verteilung im Integrationsgebiet haben, dafs auch die sämtlichen Mengen K^y abgeschlossen sind, während es die ebenen Mengen K nicht sind. Ein derartiges Beispiel hat Pringsheim angegeben[3]. Im übrigen kann die theoretische Frage nach der Vertauschung der Integrationsordnung allgemein nur dahin beantwortet werden, dafs sämtliche Mengen K^y den allgemeinen Bedingungen der obigen Sätze genügen müssen, ebenso wie die Existenz des

---

1) Ein solches erstes Beispiel gab Thomae, Zeitschr. f. Math. 23, S. 67. Er setzt $f(x, y) = 1$ für rationales x und $f(x, y) = 2y$ für irrationales x. Hier sind alle Mengen $K^x = 0$, aber für kein k ist $J(K) = 0$.

2) Vgl. die Beispiele auf S. 97.

3) Ber. d. Münch. Ak. Bd. 29, S. 50. Man stelle x und y als dyadische Brüche dar und setze die bezügliche Menge aus allen Wertepaaren x, y zusammen, die mit einer endlichen Zahl Stellen und überdies mit gleich vielen gebildet sind; z. B. $x = 0{,}0101$, $y = 1011$. Hier ist jede Menge K^x und K^y endlich, während K aus allen Punkten des Quadrats besteht.

Doppelintegrals trotz der Existenz der zweimaligen Integrale nur dann gesichert ist, wenn alle ebenen Mengen K inhaltslos sind[1]).

10. Es ist schliefslich noch übrig, auch über die Theorie der uneigentlichen Doppelintegrale zu berichten. Nach den ausführlichen Darlegungen über das uneigentliche einfache und das eigentliche Doppelintegral kann ich mich hier aber wesentlich kürzer fassen. Beschränkt man sich zunächst auf die unbedingt convergenten Integrale, so bleiben ersichtlicher Weise alle die Ausführungen bestehen, die oben über den Charakter und das gegenseitige Verhältnis der einzelnen Definitionen gemacht worden sind. Insbesondere läfst sich die Definition von de la Vallée Poussin auf Functionen mehrerer Variablen ausdehnen, und es folgt auch hier aus ihr, dafs $J(K_\infty) = 0$ ist, und dafs das Integral überdies auf jedem Gebiet δ_ν der zu K_∞ gehörigen Gebietsmenge $D = \{\delta_\nu\}$ absolut convergent ist und damit auch auf jedem Teilgebiet von H. Es folgt auch weiter, dafs die Summe der Integrale, die sich über ν Teilgebiete $\delta_1', \delta_2', \ldots \delta_\nu'$ erstrecken, mit wachsendem ν selbst eine Folge bildet und gegen den Wert des Doppelintegrals convergirt, so dafs der Integralwert auch von der Menge D unabhängig ist.

Hiermit ist das Analogon der Eigenschaft erreicht, auf die sich Harnack's Definition des uneigentlichen einfachen Integrals stützt; sie ist es zugleich, die die Grundlage von C. Jordan's[2]) Definition des uneigentlichen Doppelintegrals bildet, und die auch Stolz[3]) für seine Darstellung zum Ausgangspunkt gewählt hat[4]). Nur tritt bei Jordan und Stolz die Modification auf, dafs sie einen unbestimmten Flächenbegriff H_ν benutzen, der die Menge K_∞ ausschliefst und sich der Gesamtfläche H immer mehr nähert, während hier der ganzen Anlage des Berichtes nach die Gebiete δ_ν die Grundlage der Gebietsconvergenz bilden. Die Bedingung $J(K_\infty)$ kommt dabei in der Weise zum Ausdruck, dafs die Flächen H_ν, für die man das Doppelintegral betrachtet, der Gesamtfläche H sich so nähern sollen, dafs $H - H_\nu$ beliebig klein wird.

Was nun die Beziehung zwischen dem absolut convergenten Doppelintegral und den zweimaligen Integralen betrifft, so ist hier die gegenseitige Ersetzbarkeit immer gestattet, vorausgesetzt natürlich, dafs aufser K_∞ auch jede andere Menge K der Punkte $\omega \geq k$ unausgedehnt ist. Dies folgt hier bereits aus den analogen Sätzen

---

1) Ein specieller Satz hierüber findet sich bei Arzelà. Er lautet, dafs die Vertauschbarkeit immer gestattet ist, wenn $f(x, y)$ nach x und y bis je auf eine unausgedehnte Menge gleichmäfsig integrirbar ist. (Mem. dell' Acc. di Bologna (5) 2, S. 133 ff.)

2) Cours etc., II, S. 75.

3) Grundzüge etc., III, S. 124.

4) Übrigens erscheint diese Idee auch schon bei du Bois, Journ. f. Math. 94, S. 281 (1883); es fehlt dort freilich die Bedingung $J(K_\infty) = 0$.

über das eigentliche Doppelintegral in Verbindung mit der allgemeinen Definition de la Vallée Poussin's. Ist nämlich $f_\nu(x, y)$ irgend eine Function der zu (6) analogen Reihe, und ist K für $f(x, y)$, K_ν für $f_\nu(x, y)$ die Menge der Punkte $\omega \geqq k$, so ist, welches auch der Wert von k sei,

$$J(K_\nu) \leqq J(K) + J(K_\infty),$$

und daher $J(K_\nu) = 0$, falls $J(K) = 0$ und $J(K_\infty) = 0$ ist. Es genügt daher jedes $f_\nu(x, y)$ den Bedingungen von Satz VII, und nach Satz VIII ist daher für jedes $f_\nu(x, y)$ das Doppelintegral durch das zweimalige Integral ersetzbar. Gemäfs unseren Annahmen über die Mengen K und K_∞ ist aber nach Satz IX auch das umgekehrte der Fall. Von den beiden Reihen

$$(8) \quad \int\int f_1(x, y)\,dH, \quad \int\int f_2(x, y)\,dH, \ldots \quad \int\int f_\nu(x, y)\,dH, \ldots$$

$$(9) \quad \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f_1(x, y)\,dy, \quad \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f_2(x, y)\,dy, \ldots \quad \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f_\nu(x, y)\,dy, \ldots$$

bildet also die zweite eine Folge, wenn die erste es thut, und die erste bildet eine Folge, wenn die zweite es thut. Wir haben es ja nur mit zwei einfachen Fundamentalreihen bestimmter Zahlgröfsen, oder falls man das Integral ebenfalls durch ein Grenzverfahren auflöst, mit vorgeschriebener Reihenfolge der Grenzübergänge zu thun[1]).

Das hiermit erreichte Resultat hat noch nicht diejenige einfachste Form, in der es zugleich den praktischen Ansprüchen zu genügen vermag. Um diese zu erhalten, nehme man $f(x, y)$ überall positiv[2]), denke sich die Function $f_\nu(x, y)$, die man für festes x ins Auge zu fassen hat, durch die zugehörige möglichst stetige Function $\varphi_\nu(x, y)$ ersetzt, und setze alsdann

$$\int_b^{b_1} f_\nu(x, y)\,dy = \int_b^{b_1} \varphi_\nu(x, y)\,dy = F_\nu(x),$$

wo $F_\nu(x)$ in dem oben angegebenen Sinn für gewisse x auch eine

1) Die obige Betrachtung zeigt, dafs es für die Fälle, in denen man es mit vorgeschriebener Folge von Grenzübergängen zu thun hat, nicht zweckmäfsig scheint, jedesmal die Doppelsumme zu Grunde zu legen. Diese Bemerkung trifft übrigens auch die von du Bois resp. Pringsheim gegebenen Beweise für den Satz VIII. Will man übrigens die Analyse der Grenzprocesse weiter treiben, so beruht der obige Satz darauf, dafs für die Functionen $f_\nu(x, y)$ auch die im Beweis von Satz IX auftretenden Gröfsen $\int(\sigma + \sigma')k_m\,dx$ eine Folge bilden, und zwar eine solche, die gegen Null convergirt. Die Zahl der Teile, mit denen man dabei operiren mufs, wird natürlich mit wachsendem ν ebenfalls beliebig grofs.

2) Es ist klar, dafs dies keine wesentliche Beschränkung ist.

mehrwertige Function sein kann, aber jedenfalls eine integrirbare Function von x ist. Diese Function ersetze man nun ebenfalls durch die ihr entsprechende Function $\Phi_\nu(x)$, so ist schliefslich

$$\int_a^{a_1} dx \int_b^{b_1} f_\nu(x, y)\,dy = \int_a^{a_1} \Phi_\nu(x)\,dx,$$

und es bilden jetzt auch die Integrale

$$(10) \qquad \int \Phi_1(x)\,dx, \quad \int \Phi_2(x)\,dx, \ldots \quad \int \Phi_\nu(x)\,dx, \ldots$$

die nämliche Folge, wie die Integrale von (8) und (9). Diese Folge besitzt nun aber den Charakter, den die Definition (S. 187) des uneigentlichen einfachen Integrals verlangt. Erstens bilden die Functionen

$$(11) \qquad \Phi_1(x), \ \Phi_2(x), \ldots \Phi_\nu(x), \ldots$$

eine solche Functionenreihe, wie sie der Definition entspricht. Wenn nämlich für irgend ein x die Relation $f_{\nu+1}(x, y) \geqq f_\nu(x, y)$ besteht, so folgt daraus, dafs auch $\Phi_{\nu+1}(x) \geqq \Phi_\nu(x)$ ist, und daraus wieder leicht die vorstehende Behauptung. Zweitens haben aber auch die Functionen $\Phi_\nu(x)$ die Eigenschaft, dafs jede von ihnen integrirbar ist, und dafs ihre Integrale eine Folge bilden. Damit sind alle Bedingungen der Definition erfüllt, und es convergirt die obige Reihe gegen $\int \Phi(x)\,dx$, wo zunächst $\Phi(x) = \lim \Phi_\nu(x)$ ist. Wird nun noch

$$F(x) = \lim F_\nu(x)$$

gesetzt, so ist jetzt auch

$$\int_a^{a_1} F(x)\,dx = \int_a^{a_1} \Phi(x)\,dx,$$

da $\Phi(x)$ und $F(x)$ in jedem Stetigkeitspunkt übereinstimmen müssen. Für jeden Stetigkeitspunkt von $F(x)$ giebt es nämlich ein bestimmtes ν, so dafs er auch Stetigkeitspunkt eines gewissen $F_\nu(x)$ ist, also auch von $\Phi_\nu(x)$ ist, und daraus folgt nun endlich, dafs die Gleichung

$$\int\int f(x, y)\,dH = \int_a^{a_1} dx \int_b^{b_1} f(x, y)\,dy$$

in der Weise gilt, dafs

$$\int_a^{a_1} dx \int_b^{b_1} f(x, y)\,dx = \int_a^{a_1} \Phi(x)\,dx, \quad F(x) = \int_b^{b_1} \varphi(x, y)\,dy.$$

gesetzt werden kann. Dieses Resultat läfst sich nunmehr folgendermafsen aussprechen:

X. Der Wert eines absolut convergenten uneigentlichen Doppelintegrals ist gleich jedem der bezüglichen zweimaligen Integrale, und umgekehrt.

Die Bedingung des Satzes besteht nur darin, dafs sich die Integration über ein mefsbares Gebiet erstreckt und alle Mengen K unausgedehnt sind. Praktisch bedeutet er, dafs ein endlicher Wert des Doppelintegrals immer und nur dann existirt, wenn die zweimalige Integration eine Folge liefert, die ein endliches Resultat ergiebt.

11. Zu dem hiermit erreichten allgemeinen Resultat ist man nur allmählich gelangt. De la Vallée Poussin, dem man ja die gründliche und definitive Behandlung der uneigentlichen Integrale verdankt, hat den Satz in seiner ersten Arbeit nur für den Fall der sogenannten regelmäfsig convergenten Integrale abgeleitet, und zwar nennt er[1]) das Integral regelmäfsig convergent, wenn bei vorgegebenem σ die Relation

$$\left|\int_b^{b_1} f(x', y)\,dy - \int_b^{b_1} f_\nu(x', y)\,dy\right| < \sigma$$

zwar nicht für jedes x, aber doch für alle x' mit Ausnahme einer unausgedehnten Menge $X_\sigma = \{x_\sigma\}$ durch geeignetes ν resp. durch geeignetes M_ν und N_ν erreicht werden kann. Dem gegenüber ist aber zu bemerken, dafs der Satz, gerade wenn man die Definition de la Vallée Poussin's zu Grunde legt, weder von der gleichmäfsigen, noch der regelmäfsigen, noch auch sonst irgend einer bestimmten Art der Convergenz abhängen kann, weil ja jedes zweimalige Integral der Reihe (9), wie bereits erwähnt, nur scheinbar durch einen Doppellimes, und in Wirklichkeit durch einen einfachen Grenzprocefs definirt ist[2]). Es ist auch leicht, Beispiele herzustellen, in denen die vorstehende Relation für jedes vorgegebene σ für eine überall dichte Menge $X = \{x\}$ nicht erfüllt ist, und bei der Wichtigkeit des Gegenstandes führe ich ein solches Beispiel hier an. Zu diesem Zweck definire man $f(x, y)$ in einem Quadrat über der Längeneinheit wie oben (S. 195), nur mit dem Unterschied, dafs jetzt $f(x, y) = \infty$ ist, wo früher $f(x, y) = 1$ war. Alsdann besitzt die Function ein Doppelintegral S, das den Wert Null hat. Denn es ist, wie die Gebietsmenge $D = \{\delta\}$ unmittelbar lehrt, $J(K_\infty) = 0$,

1) Journ. de math. (4) 8, S. 436.

2) Dagegen kann die Art der Convergenz sehr wohl auf gewisse Eigenschaften des Integrals von Einflufs sein, also z. B. die Stetigkeit der Function $F(x)$ bewirken. Dem entsprechen die Sätze von de la Vallée Poussin. Ebenso gehört hierher der oben (S. 194) erwähnte Satz von C. Severini, Rend. d. Palermo Bd. 13, S. 20 (1899), der auch für uneigentliche Integrale Geltung hat.

und es folgt in diesem Fall bereits aus der Jordan'schen Definition, dafs $S = 0$ ist. Dagegen kann die obige Relation für keinen rationalen Punkt der x-Axe durch irgend einen Wert von ν befriedigt werden. Andererseits ist für jedes ν das zweimalige Integral

$$\int_a^{a_1} dx \int_b^{b_1} f_\nu(x, y)\, dy = 0$$

für alle Werte x, und es liefert die Folge den richtigen Wert. Führt man hingegen die zweimalige Integration in umgekehrter Reihenfolge aus, so ist das bezügliche zweimalige Integral sogar gleichmäfsig convergent. Wenn man nun aber der Function $f(x, y)$ auch in allen Punkten

$$y = \frac{2\mu + 1}{2^\nu}, \qquad x \leqq \frac{1}{2^\nu}$$

den Wert ∞ erteilt, so ist keines der beiden zweimaligen Integrale regelmäfsig convergent, und doch gilt der Satz, und das Integral ist Null.

Für die Anwendungen und die praktische Auswertung wird man zweckmäfsig eine überall dichte Menge $X = \{x_\nu\}$ auswählen, für die man die Function $\Phi(x)$, resp. $\varphi(x, y)$ beherrscht. In dem obigen Beispiel ist insbesondere die Menge X irgend eine überall dichte Teilmenge der irrationalen Werte x, und in jedem dieser Punkte ist $\int f(x_\nu, y)\, dy = 0$, also auch $\Phi(x) = 0$ und daher auch das zweimalige Integral.

Das hiermit gewonnene Resultat deckt sich der Sache nach mit derjenigen Fassung, in der kürzlich de la Vallée Poussin den bezüglichen Satz ausgesprochen hat[1]). Er schreibt

$$\int\int f(x, y)\, dH = \underline{\int} dx \underline{\int} Mf(x, y)\, dy,$$

wo $Mf(x, y)$ die untere Grenze von $f(x, y)$ mit Bezug auf ein den Punkt x, y umgebendes kleines Gebiet bedeutet. Das Beweisverfahren, das er wählt, ist jedoch einerseits nicht einwandsfrei[2]), andererseits aber sehr complicirt, weil er bis zum Schlufsresultat mit den verschiedenen Grenzwerten operirt, die dem oberen und unteren Integral entsprechen[3]).

---

1) Journ. de math. (5) Bd. 5, S. 202 (1899).

2) Das a. a. O. unter 11 ausgesprochene Theorem trifft nicht zu, was man durch einfache Beispiele belegen kann.

3) Bei dieser Gelegenheit bemerke ich, dafs ein Satz, wie der Satz IX, auch bestehen kann, falls für eine Function $f(x, y)$ ein convergentes oberes und unteres Integral so existirt, dafs beide verschieden sind. Es ist dies immer und nur dann der Fall, wenn für irgend ein k der Inhalt $J(K) > 0$ ist. Es ist dann auch, falls $k' > k$ ist, $J(K') > 0$, und in der Reihe (8)

Einen selbständigen Beweis des obigen Satzes hat auch C. Jordan in seinem cours gegeben; er enthält jedoch eine beschränkende Bedingung, die für ihn nicht notwendig ist[1]). Der Beweis bedarf nämlich der Annahme, dafs die Menge K_∞ der Unendlichkeitspunkte kein Stück einer Geraden enthalten kann, die einer Axe parallel ist, während ihr ein Geradenstück anderer Richtung oder gar ein Curvenstück sehr wohl angehören könnte. Für den einfachen Fall, dafs Punkte von K_∞ nur auf dem Umfang von H liegen, findet sich der Satz auch bei Stolz bewiesen[2]).

Die vorstehenden Erörterungen lassen meines Erachtens die Definition de la Vallée Poussin's als die ebenso naturgemäfse, wie zweckmäfsige Grundlage für die Behandlung der uneigentlichen Integrale erkennen. In der That dürften die Vorzüge dieser Definition durch die einfache Art, wie man mit ihnen die Theorie des Doppelintegrals behandeln kann, am besten ins Licht treten.

12. Cauchy[3]) hat wohl zuerst bemerkt, dafs bei einem bedingt convergenten uneigentlichen Doppelintegral der Satz VIII nicht zutrifft, sondern das Resultat der zweimaligen Integration von der Reihenfolge abhängig ist. Du Bois[4]) hat sodann diesem Übelstand durch kritische Begrenzung der Punkte von K_∞ abhelfen wollen, doch hat diese Idee, die an Cauchy's Begriff der singulären Integrale anknüpft, keinen Anklang finden können. Präcise Sätze über bedingt convergente Doppelintegrale hat zuerst de la Vallée Poussin aufgestellt[5]), unter besonderen Bedingungen für die Menge K_∞. Doch darf es unterbleiben, auf sie näher einzugehen; denn C. Jordan hat in seinem cours den Satz ausgesprochen, dafs es bedingt convergente Doppelintegrale gar nicht geben kann[6]). Andererseits haben wir die Existenz bedingt convergenter einfacher Integrale zugelassen, freilich mit einem Hinweis auf eine spätere Erörterung. Es fragt sich, worin denn hier der Unterschied zwischen beiden Gattungen von Integralen begründet ist.

Hat die Function $f(x, y)$ ein uneigentliches Integral im Gebiet H, so kann man die Forderung stellen, dafs diese Function auch über jedes Teilgebiet H' von H ein Integral besitze. In diesem all-

---

sind von einem bestimmten v an das obere und untere Integral verschieden. Dann stellen die Reihen (8) resp. (9) je zwei verschiedene Folgen convergenter Werte vor, für je zwei entsprechende besteht aber wieder die Gleichheit.

1) Cours etc. (2) II, S. 67 u. 88. Die oben erwähnte Bedingung ist in § 86 unter Nr. 3 enthalten. Übrigens umfafst der Beweis Jordan's auch den Fall eines unendlich grofsen Gebiets.

2) Grundzüge, III, S. 134.

3) Oeuvres (1) Bd. 1, S. 314.

4) Journ. f. Math. 94, S. 280.

5) Journ. de Liouv. (4) Bd. 8, S. 455 ff.

6) Cours etc. (2) II, S. 87.

gemeinen Umfang ist die Forderung allerdings auch für einfache bedingt convergente Integrale nicht erfüllt. Wenn dagegen das Teilgebiet H' als einfach zusammenhängend angenommen wird, so ist die Forderung für das einfache Integral erfüllt, für das Doppelintegral jedoch nicht, und dies bewirkt die bei beiden auftretende Verschiedenheit. Um diesen Sachverhalt in präciser Form zum Ausdruck zu bringen, geht man zweckmäfsig wieder auf gewisse Gebietsmengen zurück, die zu der Function $f(x, y)$ gehören, und zwar folgendermafsen.

Ist p_1 ein Stetigkeitspunkt, so dafs $f(p_1) > 0$ ist, so läfst sich um p_1 ein endlicher quadratischer Bereich legen, so dafs auch für alle seine inneren Punkte $f > 0$ ist. Dieser Bereich möge sich in derselben Weise ausdehnen, wie dies oben (S. 81) bewirkt wurde. Dabei soll es belanglos sein, wenn auf seinem Umfang einzelne Punkte auftreten, für die $f \leqq 0$ ist. Es giebt aber für das Wachstum jeder Seite eine obere Grenze, so dafs auf ihr kein Intervall vorhanden ist, in dessen sämtlichen Punkten $f \leqq 0$ ist. Der so um p_1 bestimmte Bereich sei δ_1^+. Liegen aufserhalb δ_1^+ noch andere Stetigkeitspunkte von $f(x, y)$, in denen $f > 0$ ist, und ist p_2 einer von ihnen, so construiren wir um ihn einen analogen Bereich δ_2^+, u. s. w. Wir erhalten so eine Gebietsmenge $D^+ = \{\delta_\nu^+\}$, und es sei P_+ die Gesamtheit der Punkte, die im Innern oder auf dem Umfang aller Bereiche δ_ν^+ liegen. Mit den Stetigkeitspunkten $f(x, y) < 0$ können wir ebenso eine Gebietsmenge $D^- = \{\delta_\nu^-\}$ und eine Punktmenge P_- definiren. Es können nun noch Punkte resp. Gebiete vorhanden sein, in denen $f(x, y) = 0$ ist; in diesem Fall führen sie zu einer Menge $D^0 = \{\delta_\nu^0\}$ und einer Punktmenge P_0. Die Mengen D^+, D^-, D^0 müssen nun aber das Gebiet H überall dicht bedecken, und zwar so, dafs jeder innere Punkt von H entweder einer der drei Mengen P_+, P_-, P_0 angehört, oder aber Grenzpunkt mindestens zweier dieser Mengen ist. Hiermit haben wir die für die weiteren Schlüsse nötige Grundlage gewonnen[1]). Man kann nämlich jetzt Teilgebiete der Punktmengen P_- und P_0 so ins Auge fassen, dafs sie im Verein mit der Punktmenge P_+ oder einem Teil von ihr ein einfach zusammenhängendes Gebiet H' bilden, und da das Doppelintegral nur bedingt convergirt, so kann dies sogar so geschehen, dafs das bezügliche Doppelintegral in H' unendlich grofs ist.

Für einfache Integrale hingegen ist dies nicht mehr möglich. Die Intervallmengen D^+, D^-, D^0 existiren allerdings auch hier; wenn man aber Teilintervalle so wählt, dafs das über sie erstreckte Integral einen unendlichen Wert liefert, so müssen diese Intervalle immer sämtlich getrennt von einander liegen. Dies ist der Grund, aus dem

1) Für die genauere Analyse der geometrischen Begriffe auf Grundlage der Mengentheorie verweise ich auf den vierten Abschnitt.

C. Jordan zu dem Schlufs gelangt ist, dafs es bedingt convergente uneigentliche Doppelintegrale nicht giebt. Man sieht aber zugleich, dafs wenn man die Forderung des einfachen Zusammenhangs fallen läfst, die gleiche Auffassung den bedingt convergenten einfachen Integralen gegenüber Platz greift[1]). Dieser Auffassung hat kürzlich O. Stolz Ausdruck gegeben und infolge davon auch die Existenz des bedingt convergenten einfachen Integrals verneinen zu sollen geglaubt[2]). Mit anderen Worten: Verlangt man nicht allein, dafs auf jedem δ_ν ein Integral existirt, was bereits oben als eine notwendige Ergänzung der Definition für das bedingt convergente Integral erkannt wurde, sondern dafs auch auf jeder beliebigen Gruppe von Teilintervallen der δ_ν ein Integral existirt, so gelangt man auf Grund dieser Forderungen nur zu dem absolut convergenten einfachen Integral. Das absolut convergente Integral besitzt aber auch andererseits alle die einfachen Eigenschaften, die den eigentlichen Integralen eigentümlich sind, was einer näheren Ausführung nicht bedarf[3]).

Dafs die vorstehenden Betrachtungen über das Doppelintegral ohne Ausnahme auf vielfache Integrale übertragbar sind, ist evident,

---

1) Ein einfaches Beispiel ist das folgende. Man gehe von einer linearen Menge $D = \{\delta_\nu\}$ aus, die im Intervall $a \ldots b$ liegt, und bestimme innerhalb jedes δ_ν eine Function $f(x)$ folgendermafsen: Man teile δ_ν von der Mitte aus in Intervalle von der Länge

$$\varepsilon, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{9}, \cdots \frac{\varepsilon}{\mu^2}, \cdots,$$

so dafs ihre Summe δ_ν beträgt, und gebe $f(x)$ auf ihnen die Werte 1, $-2, +3, \cdots \pm \mu, \cdots$, so existirt für jedes δ_ν ein bedingt convergentes Integral, dessen Wert $2\varepsilon \lg 2$ ist. Nun lasse man das Intervall $a \ldots b$ um einen Endpunkt rotiren, und es möge $f(x, y)$ auf allen Punkten jedes so entstehenden Kreises denselben Wert haben, wie $f(x)$ in dem bezüglichen Punkt von $a \ldots b$. Dann kann man leicht einfach zusammenhängende Gebiete angeben, in denen das Integral unendlich ist. Giebt man aber den Teilen von δ_ν die Längen

$$\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2^3}, \frac{\varepsilon}{3^3}, \cdots \frac{\varepsilon}{\mu^3},$$

so erhält man absolut convergente Integrale. Falls D eine perfecte Menge T bestimmt, so existirt für das Doppelintegral eine perfecte Menge von Kreisen, die die Menge K_∞ darstellen. Man kann übrigens die Functionsbestimmung leicht so abändern, dafs sie aufser in K_∞ überall stetig ist.

2) Grundzüge, S. 144 und Ber. d. Wien. Akad. Bd. 108, II, S. 234. Der hierin ausgedrückte Gedanke geht auf Wirtinger zurück. Auch F. Hocevar hat schon die Unmöglichkeit der Teilung des Integrals in beliebige Teile hervorgehoben, Mon. f. Math. 4, S. 177 (1893).

3) Eine ausführliche Darlegung dieses Thatbestands giebt Stolz. Vgl. Grundzüge, Teil III, Cap. XVIII und Anhang, Cap. II.

da dies von allen den Begriffen und Sätzen gilt, auf denen ihre Beweise ruhen.

Ebenso begnüge ich mich mit dem Hinweis, daſs durch die Theorie des Doppelintegrals und der mehrmaligen Integrale auch die Differentiation eines Integrals nach einem Parameter in mengentheoretischer Hinsicht erledigt ist[1]).

Sechstes Capitel.

Der Fundamentalsatz der Integralrechnung.

Der Grundsatz der höheren Analysis drückt sich darin aus, daſs im allgemeinen differenziren und integriren umgekehrte Operationen sind. Dies trifft in vollem Umfang nicht mehr zu, falls man beliebige Functionen in Betracht zieht. Erstens kann der Satz, daſs das Integral $F(x)$ einer integrirbaren Function $f(x)$ wiederum $f(x)$ als Ableitung besitzt, Ausnahmen erleiden und ist durch den zutreffenden Sachverhalt zu ersetzen (1). Zweitens erleidet aber auch der Satz gewisse Ausnahmen, daſs, wenn $F(x)$ die Function $f(x)$ als Ableitung besitzt, aus $f(x)$ bis auf eine Constante immer wieder $F(x)$ durch Integration hervorgeht. Dieser sogenannte Fundamentalsatz der Integralrechnung wird naturgemäſs dann illusorisch, wenn die Ableitung $f(x)$ nicht integrirbar ist (3), er kann aber auch dann versagen, wenn $f(x)$ integrirbar ist.

Es ist du Bois-Reymond, der das Bedürfnis empfand, eine genaue Prüfung dieser Verhältnisse eintreten zu lassen, zumal im Hinblick darauf, daſs die Ableitung von $F(x)$ nicht in allen Punkten bestimmt zu sein braucht. Er bewies zuerst, daſs der Fundamentalsatz immer gilt, falls in jedem Punkt eine vordere und eine hintere Ableitung besteht und diese integrirbar ist. Bald darauf hat sich auch Dini in seinem Lehrbuch mit dem Satz beschäftigt und das Resultat du Bois' auf beliebige Functionen, deren Ableitungswerte immer endlich und integrirbar sind, ausgedehnt; so daſs der Satz für jede derartige Ableitung erfüllt ist (2).

Anders liegen die Dinge, wenn die Ableitung $f(x)$ auch unendlich wird, so daſs $f(x)$ nur ein uneigentliches Integral $F(x)$ besitzen kann. Hier besteht das bemerkenswerte Resultat, daſs sich die beiden oben gegebenen Definitionen des uneigentlichen Integrals dem Fundamentalsatz gegenüber durchaus verschieden verhalten. Er gilt nur für die uneigentlichen Integrale erster Art, d. h. also, wenn die Menge der Unendlichkeitspunkte abzählbar ist, wie durch Arbeiten von

1) Vgl. hierüber insbesondere de la Vallée Poussin, Ann. de la Soc. sc. de Brux. XVIb, 150 (1892), sowie Hossenfelder, Programm, Straſsburg i. Westpr., 1891.

Hölder und Scheeffer nachgewiesen worden ist (5). Harnack hatte den Satz ursprünglich auf jedes uneigentliche Integral auszudehnen versucht, hat dies aber im Anschlufs an die eben genannten Untersuchungen selber richtiggestellt. Es sind die streckenweise constanten Functionen, die hier eine Rolle spielen, und auf deren Existenz Harnack gerade bei dieser Gelegenheit geführt wurde[1].

Eine neue Untersuchungsrichtung ist auf diesem Gebiet von L. Scheeffer eingeschlagen worden (4). Spricht man den Fundamentalsatz dahin aus, dafs zwei Functionen $F(x)$ und $F_1(x)$, die überall dieselbe endliche Ableitung besitzen, sich nur um eine Constante unterscheiden können, so kann man fragen, unter welchen Bedingungen dies Geltung behält, wenn von den beiden Functionen $F(x)$ und $F_1(x)$ nicht mehr bekannt ist, dafs sie in allen Punkten dieselbe endliche Ableitung besitzen, wenn vielmehr eine Menge L von Ausnahmepunkten existirt, für die diese Beziehung nicht mehr erfüllt oder nicht bekannt ist (5). Wie Scheeffer gezeigt hat, bleibt der Satz bestehen, falls die Menge L abzählbar ist (6), aber nicht, falls sie die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ hat. Ist L insbesondere eine nirgends dichte Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, so braucht die Differenz beider Functionen wiederum keine Constante zu sein, sondern kann eine streckenweise constante Function bilden.

Dem obigen Fundamentalsatz gehen die Sätze von Schwarz und du Bois parallel, die ein Kriterium aufstellen, wann eine stetige Function eine lineare Function ist (7). Auch hier kann man fragen, wann dieser Satz durch Ausnahmemengen nicht beeinträchtigt wird. Diese Frage hat insbesondere für die Theorie der trigonometrischen Reihe Wichtigkeit, ihre teilweise Beantwortung ist bereits im Schlufs des vierten Capitels enthalten. Ebenso lassen sich die obigen Fragestellungen auf mehrmalige resp. mehrfache Integrale, insbesondere auf Doppelintegrale übertragen (8).

1. Es werde, wenn $f(x)$ irgend eine eigentlich oder uneigentlich integrirbare Function ist,

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

gesetzt, so folgt aus der Integraldefinition, welche Function $f(x)$ auch immer sei, dafs $F(x)$ eine stetige Function von x ist. Ist auch $f(x)$ eine stetige Function, so besitzt die Integralfunction $F(x)$ eine zweite grundlegende Eigenschaft: sie hat in jedem Punkt x eine bestimmte Ableitung $F'(x)$, deren Wert gleich $f(x)$ ist. Diese Eigen-

1) Dies ist auch der Grund dafür, dafs mehrere der von Harnack in den Math. Ann. 19 u. 23 ausgesprochenen Sätze nicht zutreffen; vgl. S. 145 dieses Berichts. Dies trifft auch seine Resultate über die trigonometrische Reihe.

schaft kann jedoch nicht mehr bestehen bleiben, wenn $f(x)$ eine beliebige punktweise unstetige Function ist. Wird nämlich wieder die möglichst stetige Function $\varphi(x)$ herangezogen (S. 134), also

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

gesetzt, so liefern gemäfs S. 181 $f(x)$ und $\varphi(x)$ dieselbe Integralfunction $F(x)$, und hieraus folgt deutlich, dafs in diesem Fall der obige Satz über den Wert der Ableitung von $F(x)$ durch eine allgemeinere Formulirung zu ersetzen ist. Andererseits erhält diese Formulirung durch Einführung der Function $\varphi(x)$ ihren einfachsten Ausdruck. In der That kommt ja für die Ableitungswerte nur $\varphi(x)$ in Frage, während die in $\psi(x)$ eingehenden äufserlichen Unstetigkeiten in dieser Hinsicht belanglos sind. Auf Grund der gewöhnlichen Betrachtungen, die auf dem Mittelwertsatz beruhen, folgt nun sofort, dafs $F(x)$ in jedem Stetigkeitspunkt von $\varphi(x)$ eine bestimmte Ableitung

$$F'(x) = \varphi(x)$$

besitzt, in jedem Punkt, wo ein Grenzwert $\varphi(x+0)$ resp. $\varphi(x-0)$ existirt, eine bestimmte vordere oder hintere Ableitung

$$F'_+(x) = \varphi(x+0), \quad F'_-(x) = \varphi(x-0),$$

wenn dagegen ein solcher Grenzwert fehlt, so existiren zwei vordere resp. zwei hintere Ableitungen, die durch die bezüglichen Unbestimmtheitsgrenzen von $\varphi(x+0)$ resp. $\varphi(x-0)$ dargestellt werden. Durch Einführung von $\varphi(x)$ gelangt man also zu den wirklichen Werten der Ableitungen.

Fassen wir nun wieder die Function $\varphi(x)$ an den Unstetigkeits punkten als mehrwertig auf und erinnern uns, dafs das Integral von $\varphi(x)$ sich nicht ändert, wenn man den Wert, den man der Function an einer Unstetigkeitsstelle x' erteilt, auf der zu x' gehörigen Unstetigkeitsstrecke $\varkappa'$ (S. 132) beliebig wählt, so folgt sofort, dafs für jede Ableitung $DF(x)$ die Gleichung

$$\int_a^x DF(x) = \int_a^x \varphi(x) = \int_a^x f(x)dx = F(x)$$

besteht, und es ergiebt sich der folgende Satz:

I. Ist $f(x)$ eine integrirbare Function und $F(x)$ ihre Integralfunction, so sind die vier Ableitungen von $F(x)$ ebenfalls integrirbar und liefern wieder $F(x)$ als Integralfunction.

Man kann übrigens diesen Satz einfacher dahin aussprechen, dafs die Differenz $f(x) - DF(x)$ eine integrirbare Nullfunction ist, und zwar für jede der vier Ableitungen $DF(x)$.

Die vorstehend abgeleiteten Beziehungen zwischen einer integrirbaren Function $f(x)$, ihrer Integralfunction $F(x)$ und deren Ableitungen dürften wohl zuerst in den einschlägigen Darstellungen von Thomae und Dini auftreten; übrigens findet sich an diesen Stellen insofern eine Ungenauigkeit, als behauptet wird, dafs an einem Punkt, wo $f(x)$ links oder rechts eine Unstetigkeit zweiter Art besitzt, das Integral eine bestimmte Ableitung nicht besitzen kann[1]), und diese Bemerkung ist auch von den späteren Autoren, die über diesen Gegenstand gearbeitet hatten, nicht corrigirt worden[2]). Solche Stellen können aber sehr wohl Stetigkeitsstellen von $\varphi(x)$ sein und damit eine bestimmte Ableitung zulassen.

Ich bemerke endlich, dafs die vorstehenden Sätze sowohl für eigentliche, wie für uneigentliche Integrale Geltung haben, da sie nur auf dem Mittelwertsatz und auf der Existenz der Function $\varphi(x)$ beruhen, die ja auch bei den uneigentlichen Integralen existirt.

2. Falls die stetige Function $F(x)$ in jedem Punkt eine bestimmte endliche Ableitung $f(x)$ besitzt, so giebt es einen dritten für den Integralbegriff grundlegenden Satz, der in der Gleichung

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx \tag{1}$$

seinen Ausdruck findet. Falls die Ableitung von $F(x)$ nicht mehr bestimmt ist, gilt dieser Satz in allgemeinerem Sinn für jede Ableitung $DF(x)$ von $F(x)$, falls diese endlich und integrirbar ist, d. h. es besteht das Theorem:

II. Ist die Function $F(x)$ im Intervall $a \cdots b$ stetig, und ist eine ihrer vier Ableitungen stets endlich und integrirbar, so gilt es von allen, und jede dieser vier Ableitungen liefert wieder $F(x)$ als Integralfunction.

Diesen Satz, der im wesentlichen von du Bois[3]) stammt, kann man folgendermafsen beweisen. Man nehme auf $a \cdots b$ die Teilpunkte $x_1, x_2, \cdots x_\nu$ beliebig an, alsdann ist offenbar

$$F(b) - Fa) = (x_1 - a)\frac{F(x_1) - F(a)}{x_1 - a} + (x_2 - x_1)\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} + \cdots$$
$$\cdots + (b - x_\nu)\frac{F(b) - F(x_\nu)}{b - x_\nu}.$$

---

1) Thomae, Einleitung etc., S. 17; Dini, Grundlagen etc., S. 369.

2) Thomae selbst hat allerdings später in einem Falle auf die mögliche Existenz einer Ableitung an solchen Punkten hingewiesen (Gött. Nachr. 1893, S. 698), ohne jedoch die obige Formulirung zu erreichen.

3) Abh. d. Münch. Ak. XII, I, S. 161 (1876); sowie Math. Ann. 16, S. 115 (1880). Vgl. auch Dini, Grundlagen etc., S. 378 (1878), sowie Pasch, Math. Ann. 30, S. 153.

Nun sei $DF(x)$ wieder irgend eine der vier Ableitungen von $F(x)$; alsdann ist bekanntlich[1])

$$g \leqq \frac{F(x_1) - F(a)}{x_1 - a} \leqq l,$$

wo g die untere Grenze und l die obere Grenze von $DF(x)$ im Intervall $a \cdots x_1$ darstellt. Daraus folgt aber sofort

$$G \leqq F(b) - F(a) \leqq L,$$

und da nun $DF(x)$ als integrirbar angenommen wurde, so convergiren, falls die Punkte $x_1, x_2, \cdots x_\nu$ im Intervall $a \cdots b$ überall dicht angenommen werden, G und L gemeinsam gegen das bezügliche Integral. Wird nun noch b durch x ersetzt, so folgt

$$\int_a^x DF(x) = F(x) - F(a). \tag{2}$$

Es giebt also auch in diesem Fall, von einer Constanten abgesehen, nur eine einzige Integralfunction.

3. Der vorstehende Satz schliefst zunächst den Fall aus, dafs die Ableitungen $DF(x)$ einer Function $F(x)$ überall endlich, aber nicht mehr integrirbar sind, sei es, dafs sie eine total unstetige oder eine punktweise unstetige Function darstellen, für die bei gewissem k der Inhalt $J(K) > 0$ ist. Die Frage, wie die Function $F(x)$ von ihren Ableitungen abhängt, bleibt natürlich bestehen, sie ist aber mittelst des Integralbegriffes nicht lösbar, doch sind in dieser Richtung nur wenige Schritte unternommen worden[2]). Es lassen sich aber jedenfalls grofse Klassen von Functionen angeben, für die dieser Sachverhalt zutrifft. Dies gilt natürlich zunächst von den streckenweise constanten Functionen, für die $J(T) > 0$ ist, andererseits aber auch von allen überall oscillirenden Functionen und denen, die sich auf solche reduciren lassen. Für eine überall oscillirende Function ist nämlich in jedem Intervall $g < 0$ und $l > 0$, also auch $G < 0$ und $L > 0$, und da es stets Intervalle $a \cdots b$ giebt, so dafs

---

1) Der bezügliche Satz wurde von Dini zuerst ausgesprochen, Atti dell' Acc. dei Lincei (3) 1, S. 131 (1877) und Grundlagen, S. 264. Vgl. auch du Bois, Math. Ann. 16, S. 119 (1880).

2) Für die nicht integrirbare Ableitung $F'(x)$ läfst sich jedenfalls ein oberes Integral $O(x)$ und ein unteres $U(x)$ definiren. Beide sind stetige Functionen der oberen Grenze und besitzen ähnliche Eigenschaften wie das eigentliche Integral. Man kann z. B. zeigen, dafs in den Stetigkeitspunkten von $F'(x)$ sowohl $O(x)$ wie $U(x)$ den Functionswert $F'(x)$ als Ableitung besitzen. Ferner zeigt man leicht, dafs $F(x) - F(a)$ zwischen $O(x)$ und $U(x)$ enthalten ist; im besondern kann $O(x) - U(x)$ eine streckenweise constante Function sein u. s. w. Diese Sätze gab Volterra, Giorn. di mat. 19, S. 340ff. (1881). Sie lassen sich ausdehnen auf den Fall, dafs eine Ableitung $F'(x)$ nicht existirt.

$F(b) \gtrless F(a)$ ist, so ist damit die Behauptung erwiesen. Dieser schon von Dini bemerkte Umstand[1]) führt zu folgendem Satz:

III. Die Ableitungen einer überall oscillirenden Function $F(x)$ sind niemals integrirbar.

Daraus darf man jedoch nicht schliefsen, dafs diese Ableitungen immer total unstetige Functionen darstellen. Wir haben ja bereits erwähnt (S. 148), dafs, wenn die Function $F(x)$ in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung $F'(x)$ besitzt, $F'(x)$ eine punktweise unstetige Function ist. Wir schliefsen daher weiter, dafs es für sie Werte k geben mufs, so dafs für die Menge K der Punkte $\omega \geqq k$ der Inhalt $J(K) > 0$ ist[2]).

Dagegen folgt aus dem Satz I von S. 148, dafs wenn eine monotone Function, die nicht aus einer unendlich oft oscillirenden Function entstanden ist, in jedem Punkt eine bestimmte vordere oder hintere Ableitung besitzt, die Ableitung stets integrirbar ist.

4. Der Satz II schliefst ferner auch den Fall aus, dafs $F(x)$ eine integrirbare Ableitung besitzt, die nicht mehr überall endlich ist, und es fragt sich, wie weit alsdann sein Geltungsbereich geht. Um dies ins rechte Licht zu setzen, ist es zweckmäfsig, der Untersuchung eine Wendung zu geben, die auf Scheeffer zurückgeht. Unser Satz ist gleichbedeutend mit dem sogenannten Fundamentalsatz der Integralrechnung, der in seiner einfachsten Form besagt, dafs zwei in einem Intervall $a \cdots b$ stetige Functionen $F(x)$ und $\Phi(x)$, die überall den gleichen endlichen Differentialquotienten besitzen, sich nur um eine Constante unterscheiden können. Nun sei eine Menge L von Ausnahmepunkten vorhanden, für die die Endlichkeit und Gleichheit der Ableitungen nicht mehr behauptet werden kann, sei es, dafs man über die Differentialquotienten nichts weifs, sei es, dafs sie nicht endlich sind oder gar nicht existiren, so ist die Frage, ob resp. wann der Schlufs auf die Constanz von $F(x) - \Phi(x)$ dann noch gestattet ist. Hierauf läfst sich freilich eine abschliefsende Antwort noch nicht geben. Wie bei der Discussion über den Wert der Ableitungen liegt auch hier die Schwierigkeit darin, dafs man es, der Natur der Sache nach, mit Mengen zu thun hat, die nicht abgeschlossen sind.

Mit Scheeffer soll die Untersuchung von vornherein so verallgemeinert werden, dafs statt der Differentialquotienten irgend eine

1) Grundlagen etc., S. 383.

2) Ein Beispiel einer nicht integrirbaren Function, für die überall eine bestimmte Ableitung $F'(x)$ existirt, giebt auch Volterra (Giorn. di mat. 19, S. 335). Er setzt über jedes Intervall δ einer Menge T, für die $J(T) > 0$ ist, von links und rechts ein Stück einer Function der Gattung $y = x^2 \sin {}^1/x$, und zwar vom Punkt $x = 0$ bis zum ersten Maximum. Für diese Function ist $F'(x) = 0$ in jedem Punkt von T, und sonst überall $F'(x)$ endlich, doch ist $F'(x)$ nicht integrirbar.

der vier Ableitungen in Betracht gezogen wird. Auch für sie besteht im einfachen Fall der Fundamentalsatz uneingeschränkt, nämlich der Satz:

IV. Hat für zwei im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetige Functionen $F(x)$ und $\Phi(x)$ irgend eine der vier Ableitungen in jedem Punkte von $a \cdots b$ den nämlichen endlichen Wert, so können sich $F(x)$ und $\Phi(x)$ nur um eine Constante unterscheiden.

Da dieser Satz grundlegend für das folgende ist, so teile ich den Beweis Scheeffer's hier mit. Wir betrachten die Function

$$\Psi(x) = c(x - a) + F(x) - \Phi(x) - (F(a) - \Phi(a)),$$

und es seien $DF(x)$, $D\Phi(x)$, $D\Psi(x)$ die bezüglichen Ableitungen. Wird zunächst c als positive Constante vorausgesetzt, so beweist man zunächst, dafs $\Psi(x)$ im Intervall $a \cdots b$ nirgends negativ sein kann. Wäre nämlich ξ ein Wert des Intervalles $a \cdots b$, so dafs $\Psi(\xi) < 0$ wäre, so giebt es eine in $a \cdots \xi$ enthaltene obere Grenze ξ' aller derjenigen Werte, für die $\Psi(x)$ nicht negativ ist, und es folgt aus der Stetigkeit von $\Psi(x)$, dafs notwendig $\Psi(\xi') = 0$ ist. Es ist also $\xi' < \xi$, und es müfste für jeden Wert ξ'' des Intervalles $\xi' \cdots \xi$ die Relation

$$\Psi(\xi'') - \Psi(\xi') < 0$$

bestehen. Daraus würde aber weiter $D\Psi(\xi') \leqq 0$ folgen; da aber andererseits $D\Phi(x)$ und $D\Psi(x)$ beide überall endlich sind, so ist leicht ersichtlich, dafs $D\Psi(x) = c$ ist für jedes x. Damit ist bewiesen, dafs $\Psi(x)$ nirgends negativ sein kann, und da dies für beliebiges c gilt, so folgt weiter, dafs auch

$$F(x) - \Phi(x) - [F(a) - \Phi(a)]$$

nirgends negativ ist. Ebenso beweist man, dafs diese Differenz nirgends positiv sein kann, d. h. es ist

$$F(x) - \Phi(x) = F(a) - \Phi(a),$$

womit der Satz bewiesen ist.

5. Sei nun die Menge L der Ausnahmepunkte zunächst nirgends dicht, so bestimmt sie eine Menge $D = \{\delta\}$ punktfreier Intervalle und damit eine abgeschlossene Menge Q, in Bezug auf die L überall dicht ist. In jedem Intervalle δ besteht dann der Satz IV in der Weise, dafs die Differenz $F(x) - \Phi(x)$ für jedes innerhalb δ gelegene Teilintervall δ' eine Constante ist, und man schliefst nun aus der Stetigkeit von $F(x) - \Phi(x)$, dafs dies auch für δ selbst der Fall ist. Gemäfs den Betrachtungen von S. 166 ist daher $F(x) - \Phi(x)$ entweder eine Constante, oder eine streckenweise constante stetige Function. Das erste ist notwendig der Fall, wenn $\mathfrak{l} = \mathfrak{a}$ ist; das zweite kann nur dann der Fall sein, wenn $\mathfrak{l} = \mathfrak{c}$ ist. Also folgt:

V. Ist für zwei stetige Functionen $F(x)$ und $\Phi(x)$ die Endlichkeit und Gleichheit entsprechender Ableitungen bis auf eine Menge L erfüllt, so ist die Differenz $F(x) - \Phi(x)$ immer dann eine Constante, wenn die Menge L nirgends dicht, und die durch sie bestimmte abgeschlossene Menge abzählbar ist.

Nimmt man nun insbesondere wieder an, dafs die Ableitungen in L überall unendlich sind, so fliefst hieraus sofort die Thatsache, dafs der Satz III gilt; d. h.

VI. Ist $F(x)$ eine stetige Function, für die irgend eine ihrer Ableitungen $f(x)$ integrirbar ist und ein uneigentliches Integral erster Art bildet, so gilt die Gleichung

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Ist zweitens die Menge L nicht abzählbar, so genügt es, die in Q enthaltene perfecte Teilmenge T ins Auge zu fassen. Wenn nun T den Inhalt Null hat, und man weifs, dafs die entsprechenden Ableitungen $DF(x)$ und $D\Phi(x)$ überall endlich sind, so gilt der Fundamentalsatz. Dies ist eine unmittelbare Folge des Satzes II. Wird nämlich

$$\Psi(x) = F(x) - \Phi(x)$$

gesetzt, so ist $D\Psi(x)$ eine integrirbare Function mit verschwindendem Integral, und nach unserem Satz resp. nach Gl. 2) folgt jetzt

$$\int_a^x D\Psi(x) = \Psi(x) - \Psi(a) = 0,$$

womit die Behauptung erwiesen ist. Also folgt:

VII. Sind für zwei stetige Functionen $F(x)$ und $\Phi(x)$ zwei entsprechende Ableitungen $DF(x)$ und $D\Phi(x)$ in allen Punkten des Intervalles $a \cdots b$ endlich, und ist ihre Gleichheit bis auf die Punkte einer Menge L bekannt, deren Inhalt Null ist, so ist in $a \cdots b$ die Differenz $F(x) - \Phi(x)$ eine Constante.

Derselbe Schlufs gilt übrigens aus denselben Gründen auch dann noch, wenn die Übereinstimmung der Ableitungen nur so bekannt ist, dafs die möglichen Differenzen eine integrirbare Nullfunction allgemeinster Art bilden[1]).

Sind dagegen die Ableitungen in den Punkten der nirgends dichten Menge L nicht mehr überall endlich, oder ist $J(L) > 0$, so hört die Anwendbarkeit des Fundamentalsatzes wirklich auf. In

1) Vgl. Ascoli, Rend. dell' Ist. Lomb. (2) 12, S. 215.

diesem Falle kann die Differenz $F(x) - \Phi(x)$ möglicherweise auch eine streckenweise constante Function sein. Die Auseinandersetzungen von Cap. 4 lehren nun aber, daſs dieser hier nur als möglich erkannte Fall auch wirklich zutreffen kann. Denn wir haben (S. 171) gesehen, daſs jede streckenweise constante Function $T(x)$, für die $J(T) = 0$ ist, eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt, an der eine vordere oder hintere Ableitung unendlich groſs ist; wir haben weiter gesehen, daſs es, falls $J(T) > 0$ ist, Functionen $T(x)$ geben kann, die in allen Punkten von T endliche Ableitungswerte besitzen. Es sind also die dortigen Resultate in Übereinstimmung mit den hier gefundenen. Auch hier aber ist zu sagen, daſs die bisherigen Untersuchungen zu hinreichenden Kriterien für die Giltigkeit des Fundamentalsatzes noch nicht geführt haben und über die früheren Resultate nicht hinausführen. Wir schlieſsen mit folgender Aussage:

VIII. Ist $F(x)$ eine stetige Function, für die eine ihrer Ableitungen $f(x)$ integrirbar ist und ein uneigentliches Integral zweiter Art liefert, so gilt die Relation

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a) + T(x) - T(a),$$

wo $T(x)$ eine gewisse streckenweise constante Function ist.

Hierin findet der Unterschied zwischen den beiden Gattungen uneigentlicher Integrale seinen einfachsten Ausdruck.

6. Es ist endlich noch der Fall zu erledigen, daſs die Menge L überall dicht ist. Für diesen Fall ist bisher nur ein einziger Satz bekannt, und zwar der folgende:

IX. Ist die Menge L der Ausnahmepunkte abzählbar, und weiſs man, daſs von den beiden Ableitungen $DF(x)$ und $D\Phi(x)$ an jedem Punkt von L mindestens eine endlich ist, so gilt der Fundamentalsatz.

Zum Beweise führen wir eine Function $\Psi_c(x)$ ein durch die Gleichung

$$\Psi_c(x) = cx + F(x) - \Phi(x),$$

wo zunächst wieder c positiv sein möge. Es folgt zunächst, daſs für jeden Punkt x, der nicht zur Menge L gehört, $D\Psi_c(x) = c$ ist. Wir nehmen nun wieder an, es gäbe einen Wert ξ, so daſs

$$F(\xi) - \Phi(\xi) - (F(a) - \Phi(a)) = -m$$

wäre, wo $m > 0$ ist, und bestimmen jetzt c so, daſs für $m > n > 0$

$$\Psi_c(\xi) - \Psi_c(a) = c(\xi - a) - m < -n$$

ist, was stets möglich ist. Im Intervalle $a \cdots \xi$ giebt es nun wieder eine obere Grenze ξ_c derjenigen Werte x, für die $\Psi_c(x) - \Psi_c(a) \geqq -n$ ist, und es folgt wie oben, daſs wegen der Stetigkeit von $\Psi_c(x)$

$$\Psi_c(\xi_c) - \Psi_c(a) = -n$$

ist, und dafs für jeden Punkt ξ'' des Intervalls $\xi_c \cdots \xi$

$$\Psi_c(\xi'') - \Psi_c(\xi_c) < 0$$

ist. Daraus folgt wiederum $D\Psi_c(\xi_c) \leqq 0$, und dies ist nur so möglich, dafs ξ_c ein Punkt der Menge L ist.

Hält man m und n fest, so kann man die Constante c innerhalb eines gewissen continuirlichen Bereichs beliebig variiren. Ist c' ein anderer Wert von ihr, so gehört dazu ein Wert $\xi_{c'}$, für den die Gleichung

$$\Psi_{c'}(\xi_{c'}) - \Psi_c(a) = -n$$

bestehen müfste, und von dem man leicht beweist, dafs er von ξ_c verschieden ist. Die Menge $L = \{\xi_c\}$ müfste also die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen, während sie doch abzählbar ist. Damit ist dargethan, dafs die Annahme $m > 0$ unzulässig ist; ebenso zeigt man die Unzulässigkeit von $m < 0$, woraus der Satz wiederum folgt.

Dieser Satz hat eine bemerkenswerte praktische Consequenz. Es folgt aus ihm, dafs der Schlufs auf die Constanz der Differenz $F(x) - \Phi(x)$ immer dann zulässig ist, falls die Gleichheit entsprechender Ableitungen für alle irrationalen Punkte eines Intervalls bekannt ist. Dagegen ist er nicht mehr erlaubt, falls diese Übereinstimmung nur für alle rationalen, resp. jede andere überall dichte und abzählbare Menge besteht. Um dies nachzuweisen, hat man nur zu zeigen, dafs man jeden rationalen Punkt als inneren Punkt eines Intervalles einer Menge $D = \{\delta\}$ betrachten kann, die eine perfecte Menge T bestimmt; denn alsdann wird die Differenz $F(x) - \Phi(x)$ eine zu dieser Menge gehörige streckenweise constante Function sein können. Eine solche Intervallmenge wird aber durch das früher erörterte Beispiel einer Borel'schen Menge dargestellt (S. 104).

Scheeffer knüpft hieran die Bemerkung, dafs die Sätze der Integralrechnung fehlerhaft sein würden, wenn man als Bereich der unabhängigen Variablen die rationalen Zahlen zu Grunde legte, wie dies den Tendenzen Kronecker's in ihrer strengeren Form entsprechen würde. Falls man dies aber doch thut, müfste man wieder den Begriff der gleichmäfsigen Differenzirbarkeit einführen, in Analogie mit dem, was wir oben für den Stetigkeitsbegriff des näheren ausgeführt haben (S. 120).

Die hiermit für einen speciellen Fall berührte Möglichkeit, dafs die Ausnahmemenge L überall dicht und nicht abzählbar ist, hat eine Behandlung allgemeiner Tragweite noch nicht erfahren.

7. Die wichtige Beziehung, die zwischen dem Fundamentalsatz der Integralrechnung und den streckenweise constanten Functionen besteht, überträgt sich auf diejenigen dem Fundamentalsatz analogen

Sätze, in denen höhere Ableitungen auftreten. Hier ist in erster Linie der Satz von Schwarz[1]) zu erwähnen, dafs eine stetige Function $F(x)$ eine lineare Function ist, falls überall der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

den Wert Null hat, sowie die verallgemeinerte Form des Satzes, die auf du Bois zurückgeht[2]). Um sie darzustellen, führt man zweckmäfsig für jede Stelle x die Unbestimmtheitsgrenzen $O(x)$ und $U(x)$ des obigen Quotienten ein und definirt eine Function $f(x)$ so, dafs sie überall einen zwischen $O(x)$ und $U(x)$ liegenden Wert hat. Wenn dann diese Function $f(x)$ überall endlich und integrirbar ist, was immer nur dann der Fall ist, wenn die Differenz $O(x) - U(x)$ eine integrirbare Nullfunction darstellt, so kann sich gemäfs dem Satz von du Bois das zweimalige Integral von $f(x)$ von der Function $F(x)$ nur um eine lineare Function unterscheiden. Dieser Satz hat bekanntlich für die Theorie der trigonometrischen Reihe Wichtigkeit. Er hat durch O. Hölder[3]) eine neue und zwingende Begründung erfahren.

Man kann wieder fragen, inwieweit diese Sätze Geltung behalten, falls eine Menge L von Ausnahmepunkten existirt. Für den Fall, dafs die Menge nirgends dicht ist, läfst sich die Antwort leicht geben. Zunächst mufs die Function auf jedem zur Menge L gehörigen Intervall δ linear sein. Daraus allein läfst sich aber ein weiterer Schlufs hier nicht ziehen, selbst wenn die Menge L endlich ist. Der Fall, der hier allein interessirt, ist derjenige, dafs die Function in jedem Punkt eine bestimmte Ableitung besitzt; dieser Fall hat aber schon früher seine Erledigung gefunden. Nur wenn L abzählbar ist, liefs sich gemäfs Satz IX von S. 175 schliefsen, dafs die Function im Gesamtintervall linear ist.

Der Fall, dafs die Menge L überall dicht ist, ist noch nicht behandelt worden.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich auch auf mehrmalige Integrale und höhere Differentialquotienten übertragen, ohne jedoch zu neuen Fragestellungen principieller Natur Veranlassung zu geben[4]).

8. Die Beziehungen zwischen einer Function $f(x)$ und ihrer Integralfunction $F(x)$ lassen sich auf Functionen mehrerer Variablen ausdehnen; einige Andeutungen hierüber dürften genügen.

---

1) Journ. f. Math. 72, S. 141.

2) Abh. d Münch. Ak. XII, S. 141 ff. (1879). Ascoli beweist den Satz für den Fall, dafs $O(x)$ und $U(x)$ integrirbare Nullfunctionen sind. (Ann. di mat. (2) 7, S. 290.) In diesem Fall ist der Satz evident.

3) Math. Ann 24, S. 183. Vgl. auch Harnack, Math. Ann. 24, S. 241.

4) Diese Ausdehnung hat Harnack durchgeführt, Math. Ann. 23, S. 270 und 24, S. 247. Vgl. übrigens die Anm. 1 auf S. 145.

Zunächst wird es wieder zweckmäfsig sein, die Function $f(x, y)$ durch die zugehörige, möglichst stetige Function $\varphi(x, y)$ zu ersetzen, die sich ergiebt, wenn man die Function $f(x, y)$ nur für die Stetigkeitspunkte definirt denkt und sie dann auf das Gesamtgebiet erweitert, so dafs $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ sich nur um eine integrirbare Nullfunction unterscheiden können. Alsdann ist

$$F(x, y) = \int_a^x \int_b^y f(x, y)\, dH = \int_a^x \int_b^y \varphi(x, y)\, dH,$$

und es bestimmt daher auch in diesem Fall die Function $\varphi(x, y)$ die wirklichen Werte der Ableitungen von $F(x, y)$. Insbesondere ist in jedem Stetigkeitspunkt von $\varphi(x, y)$ eine partielle Ableitung nach x, eine nach y und eine einzige nach x und y stets vorhanden. An den Unstetigkeitspunkten von $\varphi(x, y)$ hingegen unterliegen die Ableitungen von $F(x, y)$ andern Gesetzen, die von der Art der Unstetigkeit abhängen[1]).

Man kann auch hier Betrachtungen anstellen, die denen über den Fundamentalsatz parallel gehen, insbesondere wieder fragen, wann der Schlufs auf die Constanz der Differenz $F(x, y) - \Phi(x, y)$ bestehen bleibt, vorausgesetzt, dafs im allgemeinen $F(x, y)$ und $\Phi(x, y)$ die gleichen partiellen Ableitungen besitzen, und dafs diese bis auf eine Menge L von Ausnahmepunkten den bezüglichen fundamentalen Sätzen genügen. Ist diese Menge zunächst nirgends dicht, so kommt es auf die abgeschlossene Menge Q an, die durch die zu L zugehörige Gebietsmenge $D = \{\delta\}$ bestimmt wird. Ist sie abzählbar, so müssen gemäfs S. 85 immer zwei Bereiche δ' und δ'' benachbart sein, und der Schlufs bleibt in Kraft; ist sie nicht abzählbar, so kann wiederum $F(x, y) - \Phi(x, y) = T(x, y)$ sein, wo $T(x, y)$ eine gebietsweise constante Function darstellt.

Siebentes Capitel.

Die Convergenz der Reihen und die Functionsfolgen.

Die Bestimmung einer Function durch eine Fundamentalreihe oder Folge von Functionen bildet eine der fundamentalsten Definitionsmethoden der gesamten Analysis. Wir begegnen ihr vielfach auch da, wo sie als Grundlage der Darstellungsweise nicht so unmittelbar zu Tage tritt. Zunächst weise ich auf die vielfach benutzte Methode hin, Functionen mit Ausnahmeerscheinungen dadurch zu bilden, dafs

1) Freilich kann der Unstetigkeitscharakter von $\varphi(x, y)$ ein weit mannigfaltigerer sein, als der einer Function einer Variablen. Vgl. S. 135.

man den Grenzwert geeigneter Functionsausdrücke in Betracht zieht[1]). Dieselbe Darstellungsweise ist es aber auch, die in der Bestimmung einer Function durch eine überall dichte Menge vorgeschriebener Werte zum Ausdruck kommt, insbesondere also auch bei derjenigen Construction stetiger Functionen, die in Cap. III und IV ausgeführt wurde. Immer handelte es sich ja darum, die Functionswerte an einer Menge X_ν sich mehr und mehr häufender Punkte so vorzuschreiben, dafs die Function, die dem zugehörigen Polygonzug entspricht, in der Grenze in eine Function mit gewissen Eigenschaften übergeht. Dieser einfache Grundgedanke ist es auch, der in dem Satz von Weierstrafs zum Ausdruck kommt, dafs eine stetige Function $f(x)$ durch eine Reihe ganzer rationaler Functionen gleichmäfsig approximirt werden kann. Denn da sich ein Intervall $a \cdots b$ immer so in eine endliche Zahl von Teilen zerlegen läfst, dafs in jedem die Gesamtschwankung der Function unter einer Gröfse σ bleibt, so kann man sich einer stetigen Function durch ein ihr eingeschriebenes Polygon von wachsender Seitenzahl gleichmäfsig annähern; und so elementar diese Bemerkung ist, so wichtig scheint sie mir doch durch den Umstand zu werden, dafs C. Runge[2]) und ganz kürzlich O. Lebesgue[3]) von ihr aus auf einfachen und fast elementaren Wegen zu dem analytischen Ausdruck geeigneter ganzer Functionen resp. Polynome, die gegen die stetige Function $f(x)$ convergiren, gelangt sind[4]).

Bei dieser Auffassung ist zwischen derjenigen Definition einer Function, die auf Fixirung ihrer Werte an einer abzählbaren, überall dichten Menge beruht, und derjenigen, die in ihrer Approximation durch eine abzählbare Menge analytisch gegebener Functionen besteht, kein wesentlicher Unterschied mehr, und wenn z. B. Dini zu der von ihm aufgestellten Klasse nirgends differenzirbarer Functionen dadurch gelangt, dafs er sie durch eine unendliche Reihe überall stetiger und differenzirbarer Functionen darstellt, so ist dies der Sache nach durchaus die nämliche Methode wie diejenige, die den Betrachtungen von Cap. IV zu Grunde liegt. In der That knüpft ja auch das Resultat Dini's an die nämlichen Quotienten $s_N : t_N$ an, die oben in erster Linie in Frage kamen.

Diesen Ausführungen möchte ich gern eine Stelle gewähren, da sie mir geeignet scheinen, die Wertschätzung der dort für die Analyse

---

1) Vgl. z. B. Thomae, Einleitung etc, S 4ff., du Bois, Math. Ann. 7, S. 241, u. a. Eine grofse Zahl solcher Beispiele enthalten die Anmerkungen zu dem Pringsheim'schen Artikel II, A, 1 der Encyklopädie der math. Wiss.

2) Acta math. 7, S. 387.

3) Bull. des Scienc. (2) Bd 22, S. 278.

4) Die obige Überlegung bildet auch den Ausgangspunkt der mehrfach erwähnten Arbeit von Brodén im Journ. f. Math. Bd. 118, S. 1.

der Functionen zu Grunde gelegten Darstellungsmethoden zu erhöhen. Was übrigens diese Methoden mit der Benutzung der Functionsfolgen als ihre wesentliche Eigenschaft gemein haben, ist der Umstand, daſs immer nur eine abzählbare Menge von Vorschriften benutzt wird, und dies natürlich so, daſs eine endliche Menge solcher Vorschriften zur Erkennung der bezüglichen Gesetzmäſsigkeit im allgemeinen genügt, in den einfachsten Fällen sogar eine einzige[1]). Weiter auf die vorstehend skizzirten Probleme einzugehen, liegt jedoch auſserhalb des Rahmens dieses Berichts.

Die Darstellung von Functionen durch Reihen kommt hier zunächst in der Hinsicht ausführlicher in Betracht, daſs man mit ihnen Functionen bildet, die unendlich viele, selbst überall dicht liegende singuläre Eigenschaften haben (1). Hankel ist es bekanntlich, der diese Aufgabe zuerst in Angriff nahm, mit der ausgesprochenen Absicht, das von Riemann gegebene erste Beispiel zu verallgemeinern. Das von ihm zu diesem Behuf erfundene Princip, das den Namen des Princips der Verdichtung der Singularitäten trägt, hat einer Anregung von Weierstraſs zufolge durch Cantor eine Form erhalten, daſs es auf jede abzählbare Punktmenge anwendbar und überdies einwandsfrei ist. In neuerer Zeit ist das Princip von Brodén benutzt worden, um punktweise unstetige Nullfunctionen durch analytische Ausdrücke darzustellen, und zwar mit der Modification, daſs statt der Summenausdrücke gleichwertige Productausdrücke benutzt werden.

Eine zweite Frage, die ich hier behandle, betrifft die Punkte ungleichmäſsiger Convergenz einer Reihe, insbesondere ihre Verteilung in dem Fall, daſs die Reihe eine überall stetige Function darstellt (2). Auf diesem Gebiet waren mancherlei Controversen auszutragen, ehe man zu einwandfreien Resultaten gelangt ist. Die letzte Behandlung der Frage verdankt man W. F. Osgood (3); er hat auch die Integrirbarkeit einer derartigen Reihe geprüft und die vorher vorhandenen Irrtümer berichtigt (4). Die von ihm erreichten Resultate können als definitiv betrachtet werden. Die wesentliche Grundlage der Schlüsse besteht darin, daſs auch hier abgeschlossene nirgends dichte Mengen das Operationsobject bilden und damit die Untersuchung wesentlich erleichtern.

Auch der allgemeinste Fall einer Fundamentalreihe stetiger Functionen ist kürzlich Gegenstand erfolgreicher Behandlung gewesen. Seitdem der Begriff der ungleichmäſsigen Convergenz durch Stokes und Seidel eingeführt wurde, weiſs man, daſs, wenn die durch eine unendliche Reihe dargestellte Function eine Unstetigkeit aufweist, der Unstetigkeitspunkt ein Punkt ungleichmäſsiger Con-

---

1) Vgl. hierzu auch Brodén, der sich allgemein mit der Menge derartiger Vorschriften beschäftigt. Acta Univ. Lund. 8, S. 1.

vergenz sein mufs. Bis vor kurzem beschränkte sich aber unsere weitere Kenntnis der Darstellung von unstetigen Functionen als Folgen stetiger oder auch unstetiger Functionen wesentlich auf Beispiele resp. auf gewisse Kunstgriffe allgemeinerer Tragweite. Ein Resultat allgemeineren Inhalts ist erst seit kurzem vorhanden (6). Man verdankt die ebenso eingehende wie weitausblickende Behandlung dieses Gebiets R. Baire, der hier durchaus neue Wege gegangen ist. Er hat die Frage in Untersuchung genommen, wie eine punktweise unstetige Function beschaffen sein mufs, um durch eine Folge stetiger oder ganzer rationaler Functionen darstellbar zu sein, und gelangt zu dem Resultat, dafs sie in Bezug auf eine jede perfecte Menge höchstens punktweise unstetig sein darf; umgekehrt ist sie aber alsdann auch immer durch eine solche Folge darstellbar. Die neuen Ideen, die ihn zu diesem Resultat geführt haben, haben es sogar ermöglicht, auch die Darstellung von total unstetigen willkürlichen Functionen durch Folgen und zwar mehrfache Folgen stetiger Functionen in Angriff zu nehmen (8).

Eine unendliche Reihe von Functionen läfst sich auch von dem Gesichtspunkt aus betrachten, dafs man die Punktmengen untersucht, an denen die Convergenz aufhört (9). Diese Mengen sind jedoch nicht abgeschlossen, und daher fehlt es hier noch an einfachen Resultaten. Eine sehr bemerkenswerte Reihengattung, bei der die Divergenzstellen überall dicht liegen, während die Reihe zugleich für eine überall dichte Menge convergirt, hat Borel angegeben (10). Im übrigen ist das hier bezeichnete Problem nur in der Theorie der trigonometrischen Reihen praktisch hervorgetreten. Ihrer habe ich daher ebenfalls noch kurz zu gedenken, naturgemäfs unter Beschränkung auf diejenigen Probleme, in welche die Theorie der Punktmengen hineinspielt[1]). Mit ihnen haben sich insbesondere Harnack und Hölder beschäftigt, insbesondere verdankt man Hölder eine exacte Erledigung des Falles, dafs unendlich viele Stellen auftreten, an denen die Reihe divergirt, während Harnack wesentlich die Stellen endlicher Oscillation der Reihe in Betracht gezogen hat (11).

1. Es seien

(1) $$u_1(x),\ u_2(x),\ \cdots u_\nu(x),\ \cdots$$

Functionen im Intervall $a \leqq x \leqq b$, und es werde

(2) $$s_\nu(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_\nu(x)$$

gesetzt, so dafs die Reihe

(3) $$s_1(x),\ s_2(x),\ \cdots s_\nu(x),\ \cdots$$

---

1) Eine historische Darstellung der Entwickelung der Theorie findet sich bekanntlich in der Dissertation von A. Sachse (Göttingen 1879) und Zeitschr. f. Math. 25, S. 281 (Ergänzungsband).

entsteht. Wenn diese Reihe, was den einfachsten Fall darstellt, für jedes $a \leqq x \leqq b$ convergirt, so soll sie eine Folge oder Fundamentalreihe von Functionen heifsen. Sie stellt dann eine im Intervall $a \cdots b$ eindeutige Function dar, die durch $s_\omega(x)$ bezeichnet werden soll. Die Functionen $u_\nu(x)$ resp. $s_\nu(x)$ können im übrigen ganz beliebig sein.

Statt einer Folge von Functionen $s_\nu(x)$, die durch Gleichung (2) definirt ist, kann man auch solche Folgen in Betracht ziehen, die als Producte einer unbegrenzt zunehmenden Zahl von Factoren $u_\nu(x)$ definirt sind, so dafs

$$p_\nu(x) = u_1(x) u_2(x) \cdots u_\nu(x)$$

ist und $\lim p_\nu(x) = p_\omega(x)$.

Die erste allgemeinere Aufgabe, die man hier stellen mag, ist diejenige, die Hankel[1]) durch das Princip der Verdichtung der Singularitäten gelöst hat. Diese Aufgabe fordert, Singularitäten irgend welcher Art an einer überall dichten Menge so zu häufen, dafs sie sich gegenseitig nicht stören. Wenn $\varphi(y)$ an der Stelle $y = 0$ ein singuläres Verhalten aufweist, so setzt Hankel

$$u_\nu(x) = A_\nu \varphi(\sin \nu\pi x), \quad s_\nu(x) = \sum_1^\nu A_\nu \varphi(\sin \nu\pi x)$$

und unterwirft die A_ν der Bedingung, dafs die bezügliche unendliche Reihe convergirt. Die so definirte Function $s_\omega(x)$ wird dann im allgemeinen an allen rationalen Stellen eine analoge Singularität besitzen, wie $\varphi(y)$ im Nullpunkt. Dieses sehr fruchtbare Princip ist später insbesondere von Dini[2]) näher erörtert und strenger formulirt worden.

An diesem Princip hängen aber, wie Cantor[3]) ausgeführt hat, drei wesentliche Mängel. Erstens ist die Punktmenge, auf die sich die Singularitäten erstrecken, nicht hinreichend beliebig; zweitens wird die Singularität, die an der Stelle $x = p : q$ auftritt, nicht aus einem einzelnen Glied der Reihe stammen, sondern aus unendlich vielen, und es bedarf daher in jedem Fall der Untersuchung, ob diese Singularitäten sich nicht etwa gegenseitig zerstören[4]); drittens legt aber auch die Einführung des Sinus der Function unnötig Schwankungen auf, die dem ihr zu erteilenden Verhalten durchaus fremd sind. Demgegenüber hat Cantor die Hankel'sche Methode auf nachstehende Weise verallgemeinert und zugleich vereinfacht.

---

1) Math. Ann. 20, S. 63.
2) Grundlagen, S. 157 ff. Vgl. auch Darboux, Ann. de l'Ec. norm. (2) 4, S. 92 ff. Vgl. auch die folgende Anmerkung.
3) Math. Ann. 19, S. 588.
4) Ph. Gilbert hat darauf hingewiesen, dafs dies wirklich eintreten kann. (Bull. de l'Ac. de Belg. (2) Bd. 23, S. 428.)

Es sei

$$\Xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots) = \{\xi_\nu\}$$

eine beliebige, abzählbare Menge von Punkten, ferner wieder $\varphi(y)$ eine Function, die an der Stelle $y = 0$ eine bestimmte Singularität besitzt; bildet man dann die Function

$$s_\omega(x) = \sum_1^\infty A_\nu \varphi(x - \xi_\nu),$$

in der die Coefficienten A_ν wieder die Convergenz, sowie eventuell andere Eigenschaften der Function bewirken sollen, so hat diese Function an allen Stellen ξ_ν die analoge Singularität, wie $\varphi(y)$ an der Nullstelle, und es ist auch klar, daſs in dieser Function die Singularitäten einander nicht stören, da ja an jeder Stelle ξ_ν nur eine Function singuläres Verhalten zeigt. Diese Methode besitzt übrigens auch den Vorzug gröſserer geometrischer Anschaulichkeit; sie lagert stets die gleichen Functionen $\varphi(x - \xi_\nu)$ übereinander, während sich die Superposition der Functionen $\varphi(\sin \nu\pi x)$, besonders wegen der ihnen anhaftenden Schwankungen, der Vorstellbarkeit mehr oder weniger entzieht. Mit dieser Methode sind Functionen besonderer Art in groſser Menge von verschiedenen Seiten construirt worden[1]).

Brodén[2]) hat kürzlich das Hankel-Cantor'sche Princip der Verdichtung in der Weise benutzt, daſs er unendliche Producte zur Darstellung verwendet, wie dies für complexe Functionen geläufig ist. Er hat nach dieser Methode punktweise unstetige Nullfunctionen dargestellt. Die Stammfunction, die er zu Grunde legt, ist die Function

$$\varphi(x) = x e^{x-1},$$

die zugleich mit x positiv, Null und negativ ist, und insbesondere einen gegebenen positiven Wert nur für einen Wert von x annimmt. Mit ihr combinirt er die von ihm erdachten und oben (S. 103) erörterten Zahlenmengen, die mit den Ziffern $l_1, l_2, l_3, \cdots$ gebildet sind. Er bildet nämlich das Product

$$f(x) = p_\omega(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\cos 2\pi L_\nu x),$$

wo wieder $L_\nu = l_1 \, l_2 \ldots l_\nu$ ist, und zeigt, daſs $f(x)$ eine Nullfunction ist, bei der die Verteilung der Unstetigkeitspunkte von den Werten der l_ν abhängt. Setzt man nämlich

$$L_\nu x = A + \frac{\varepsilon_{\nu+1}}{l_{\nu+1}} + \frac{\varepsilon_{\nu+2}}{l_{\nu+1} \cdot l_{\nu+2}} + \cdots = A + \alpha_\nu$$
$$= B - \frac{\eta_{\nu+1}}{l_{\nu+1}} - \frac{\eta_{\nu+2}}{l_{\nu+1} \cdot l_{\nu+2}} - \cdots = B - \beta_\nu,$$

1) Man vgl. z. B. Dini, Grundlagen, S. 157 ff.
2) Math. Ann. 51, S. 299. Vgl. auch Reiff, Böklen's math. Mitt. 3, S. 94.

wo also $B = A + 1$ ist, so gelten die Relationen

$$\frac{1+\varepsilon_{\nu+1}}{l_{\nu+1}} > \alpha_\nu > \frac{\varepsilon_{\nu+1}}{l_{\nu+1}}, \quad \frac{1+\eta_{\nu+1}}{l_{\nu+1}} > \beta_\nu \geq \frac{\eta_{\nu+1}}{l_{\nu+1}},$$

und es hängt, wie leicht ersichtlich, der Wert von $f(x)$ von der kleineren der beiden Gröfsen α_ν und β_ν ab. Ist $X = \{x_\nu\}$ die Menge der durch endliche Ausdrücke darstellbaren Zahlen, so dafs wieder $C = X + X_g$ ist, so führen die Relationen für α_ν und β_ν zu folgenden Ergebnissen:

Es ist, welches auch die Werte von l_ν sein mögen, immer jede Stelle der abzählbaren Menge

$$X_1 = \left\{\frac{2\lambda - 1}{4L_\nu}\right\}$$

eine Nullstelle von $f(x)$. Ist ferner jedes $l_\nu \leqq g$, so sind auch alle Punkte von X_g Nullstellen, während die Unstetigkeitspunkte nur durch die Menge X_2 dargestellt werden, die Complementärmenge zu X_1 bezüglich X ist, so dafs also $X_1 + X_2 = X$ ist. Jede Menge K_ν ist endlich. Ist dagegen $\lim l_\nu = \infty$, so erhält man eine Nullfunction, für die jedenfalls X_2 und aufserdem eine überall dichte Menge X_u der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ die Unstetigkeitsstellen bildet. Alsdann ist $\mathfrak{k}_\nu = \mathfrak{c}$.

Einfacher wird die Fragestellung, wenn man sich auf Functionen beschränkt, die stets positiv sind, was für die vorstehenden nicht zutrifft. Dann kann man direct mit den analog gebildeten Producten $\Pi \cos^2(2\pi L_\nu x)$ operiren.

2. Durch die Theorie der Punktmengen sind ganz wesentlich auch diejenigen Probleme geklärt worden, die die ungleichmäfsige Convergenz der Reihen betreffen. Sei jedes $u_\nu(x)$ und damit auch jedes $s_\nu(x)$ eine im Intervall $a \cdots b$ stetige Function. Wenn dann die durch sie bestimmte Function $s_\omega(x)$ nicht mehr für jedes x stetig ist, so beruht dies darauf, dafs jede Unstetigkeitsstelle von $s_\omega(x)$ ein Punkt ungleichmäfsiger Convergenz ist. Diese Erkenntnis geht bekanntlich auf Stokes[1]) und Seidel[2]) zurück. Es dauerte aber geraume Zeit, ehe man zu weiteren Resultaten auf diesem Gebiet gelangte, besonders wohl deshalb, weil es lange an typischen Beispielen für die hier vorhandenen Möglichkeiten fehlte. Seidel hat die Frage, ob sein Satz umkehrbar ist, ob also, wenn $s_\omega(x)$ stetig ist, die Reihe gleichmäfsig convergirt, ausdrücklich als eine offene bezeichnet[3]). Stolz[4]) bezeichnete den Satz 1875 als um-

1) Trans. of the Cambr. Math. Soc. 7, S. 533 (1847).
2) Abh. d. Münch. Ak. II, Bd. 7, S. 381 (1848).
3) Auch Heine teilt noch diese Meinung. (Journ. f. Math. 71, S. 353, 1870.)
4) Ber. d. Innsbr. naturw. Ges. 5, S. 31 (1875).

kehrbar; es wurden aber bald darauf von Darboux[1]) und du Bois-Reymond[2]) Beispiele construirt, die darthun, daſs dies irrig ist. Einfache Beispiele sind später auch von Cantor[3]) angegeben worden; wenn man von der analytischen Darstellungsform absieht, so kann, wie das folgende zeigen wird, die Construction solcher Beispiele in mannigfachster Weise ohne Mühe ausgeführt werden. Darboux gab übrigens auch ein Beispiel, in dem die Function $s_\omega(x)$ eine punktweise unstetige Function mit überall dicht liegenden Unstetigkeitstellen ist[4]).

Das Darboux'sche Beispiel stellt aber auch die äuſserste Grenze dessen vor, was hier möglich ist. Es besteht nämlich der Satz:

I. Sind alle $s_\nu(x)$ im Intervall $a \cdots b$ stetige Functionen, so ist die Function $s_\omega(x)$ eine höchstens punktweise unstetige Function.

Diesen Satz führt man nach dem Vorgang von R. Baire auf einen früher abgeleiteten Satz über Functionen zweier Variablen zurück (S. 142). Hierzu führt eine geometrische Darstellung, die übrigens in ihrer allgemeinen Form schon bei du Bois[5]) und Arzelà[6]) enthalten ist. Man denke sich eine Schar paralleler Geraden $h_1, h_2, h_3, \cdots h_\nu, \cdots$ mit den Gleichungen

$$y = y_1, \; y = y_2, \; \cdots \; y = y_\nu, \; \cdots,$$

die gegen die x-Axe convergiren, und bilde nun — und darin besteht der Baire'sche Kunstgriff — eine im ganzen Rechteck definirte Function $f(x, y)$ in der Weise, daſs sie auf $y = y_\nu$ den Wert $s_\nu(x)$ hat und sich von der Geraden h_ν zu $h_{\nu+1}$, d. h. von $s_\nu(x)$ zu $s_{\nu+1}(x)$ linear ändert. Dann hat $f(x, y)$ in dem ganzen Rechteck die Eigenschaft, stetig bezüglich y zu sein, und ist im ganzen Rechteck, höchstens mit Ausnahme der x-Axe, eine stetige Function von x. Es sind also die Voraussetzungen des genannten Satzes erfüllt, womit der Satz I bewiesen ist.

Aus ihm folgt nun auch ein Beweis des Satzes II von S. 148. Wird nämlich

$$\frac{f(x + h_\nu) - f(x)}{h_\nu} = f(x, h_\nu) = f_\nu(x)$$

gesetzt, und beachtet man, daſs für jeden Wert x eine bestimmte Ableitung existiren soll, so ist, welches auch die Werte h_ν sein mögen,

$$\lim f_\nu(x) = f_\omega(x) = f'(x),$$

was dem bezüglichen Satz entspricht.

---

1) Ann. de l'Ec. Norm. (2) 4, S. 77 (1875).
2) Abh. d. Münch. Ak. II, Bd. 12, 1, S. 120.
3) Math. Ann. 16, S. 269.
4) a. a. O., S. 80.
5) Journ. f. Math. 100, S. 332 (1887).
6) Rend. dell' Acc. di Bologna 1884, S. 79.

Man kann die vorstehenden Betrachtungen in der Richtung erweitern, dafs man die Functionen $u_\nu(x)$ resp. $s_\nu(x)$ nicht mehr als stetig annimmt, sondern insbesondere als punktweise unstetig. In dieser Hinsicht begnüge ich mich, den folgenden zuerst von Volterra[1]) ausgesprochenen Satz anzuführen:

II. **Eine gleichmäfsig convergente Reihe punktweise unstetiger Functionen stellt ebenfalls eine punktweise unstetige Function dar.**

Die Richtigkeit des Satzes ergiebt sich durch die Überlegung, dafs, wenn K_ν die der Function $u_\nu(x)$ entsprechende Menge von Punkten $\omega \geqq k_\nu$ ist, es nur eine endliche Zahl von Functionen $u_\nu(x)$ geben kann, bei denen $k_\nu > k$ ist, bei vorgegebenem k. Die Punkte $\omega \geqq k$ von $s_\omega(x)$ setzen sich also aus einer endlichen Zahl von Mengen K_ν zusammen und bilden daher ebenfalls eine nirgends dichte Menge. Dies gilt für jedes k, und damit ist der Satz bewiesen.

3. Es möge jetzt angenommen werden, dafs $s_\omega(x)$ eine im ganzen Intervall $a \cdots b$ stetige Function ist, so kann man fragen, welches die allgemeinste Verteilung der Punkte ungleichmäfsiger Convergenz sein kann. Diese Frage hat eine präcise Antwort kürzlich durch Osgood[2]) gefunden[3]).

Für die Darstellung ist es bequem, den Begriff der ungleichmäfsigen Convergenz zunächst an die Extremwerte der Functionen $s_\nu(x)$ zu knüpfen und aufserdem die Function

$$S_\nu(x) = s_\nu(x) - s_\omega(x)$$

einzuführen, die ebenfalls stetig ist und die Eigenschaft besitzt, dafs im ganzen Intervall $a \cdots b$

$$\lim S_\nu(x) = S_\omega(x) = 0$$

ist. Nun sei $a' \cdots b'$ irgend ein Intervall innerhalb $a \cdots b$, und

---

1) Giorn. di mat. 19, S. 79 (1881). Der Satz gilt übrigens nach Volterra auch, wenn die Reihe nur einfach gleichmäfsig convergirt, was ebenso bewiesen wird.

2) Am. Journ. of Math. 19, S. 155.

3) Auch Arzelà hat sich eingehend mit der Frage beschäftigt, wann $s_\omega(x)$ stetig ist (Rend. di Bologna 1883/84, S. 79). Sein Resultat, das auch seinen weiteren Untersuchungen zu Grunde liegt, verlangt die „streckenweise gleichmäfsige" Convergenz, und beruht auf folgender Annahme. Wenn zu jedem x das gröfste Intervall ϑ bestimmt wird, so dafs für alle ν von einem gewifsen ν an die Schwankung von $s_\nu(x)$ in diesem Intervall unterhalb σ liegt, so soll die mit Rücksicht auf alle Werte x betrachtete untere Grenze von ϑ nicht Null sein (a. a. O. S. 81). Dies ist jedoch irrig, und darauf beruhen auch die weiteren irrigen Schlüsse von Arzelà auf diesem Gebiet. Ein näheres Eingehen auf seine Begriffe und Sätze scheint daher nicht geboten zu sein. Vgl. auch S. 231.

ξ_ν ein Wert des Intervalls $a' \cdots b'$, in dem $S_\nu(x)$ ein Extremum besitzt, und es mögen die Punkte

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots \xi_\nu, \cdots$$

den Punkt ξ_ω als Grenzpunkt haben, und zwar so, dafs alle Punkte ξ_ν rechts von ξ_ω liegen. Sind dann

$$M_1, M_2, M_3, \cdots M_\nu, \cdots$$

die zugehörigen Extrema der Functionen $S_\nu(x)$, so ist ξ_ω ein Punkt rechtsseitiger gleichmäfsiger oder ungleichmäfsiger Convergenz, je nachdem diese Extrema gegen Null convergiren[1]) oder nicht, und zwar naturgemäfs für jede Folge $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\nu, \cdots$, die ξ_ω als Grenzpunkt besitzt. Ist dies nicht der Fall, so besitzen sie doch eine obere und untere Unbestimmtheitsgrenze M_r und N_r, und analog liegen die Dinge, wenn wir von solchen Extremwerten ξ_ν ausgehen, die sämtlich links von ihrem Grenzpunkt ξ_ω liegen. Wir erhalten dann zwei analoge Gröfsen M_l und N_l, und falls beide Null sind, ist ξ_ω ein Punkt linksseitiger gleichmäfsiger Convergenz.

Die hier eingeführten Gröfsen sind im wesentlichen identisch mit denen, die Osgood als Indices des Punktes ξ_ω bezeichnet[2]). Um auf dem hier skizzirten Wege alle Punkte ungleichmäfsiger Convergenz zu erhalten, genügt es, die Punktmengen

$$\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, \cdots \Xi_\nu, \cdots$$

ins Auge zu fassen, wo $\Xi_\nu = \{\xi_\nu\}$ die Menge aller Extrema von $S_\nu(x)$ im Intervall $a \cdots b$ darstellt[3]), und die sämtlichen Grenzpunkte der von allen Ξ_ν gebildeten Menge $\{\Xi_\nu\}$, so sind in dieser Menge jedenfalls die Punkte ungleichmäfsiger Convergenz sämtlich enthalten.

Es thut der Allgemeinheit der Resultate keinen Abbruch, wenn wir für das folgende alle Extrema als Maxima annehmen oder aber nur die absoluten Beträge der Gröfsen M und N ins Auge fassen und deren gröfsten durch Ω bezeichnen. Falls nun $\Omega = k$ ist, soll k als Grad der ungleichmäfsigen Convergenz und ξ_ω als ein Punkt $\Omega = k$ oder als Punkt vom Grade k bezeichnet werden. Definiren wir dann noch eine Convergenzfunction $C(x)$ durch die Gleichung

$$C(x) = \Omega,$$

so dafs, falls x ein Punkt gleichmäfsiger Convergenz ist, $C(x) = 0$ zu setzen ist, so kann das Theorem, das diese Fragen beherrscht, einfach durch folgenden Satz ausgedrückt werden:

---

1) Dafs dies mit der gleichmäfsigen Convergenz gleichbedeutend ist, bemerkte gelegentlich G. Cantor (Math. Ann. 16, S. 113 u. 267).

2) a. a. O., S. 166. Bei Osgood hat jeder Punkt einen Index, hier braucht dies nicht der Fall zu sein, da ξ_ω nicht in jeden Punkt gleichmäfsiger Convergenz zu fallen braucht.

3) Hier bedeutet also $\{\xi_\nu\}$ eine endliche Menge.

III. Die Convergenzfunction ist eine punktweise unstetige Nullfunction[1]).

Den Beweis kann man im Anschlufs an den Gedankengang von Osgood folgendermafsen führen. Zunächst folgt aus der Definition der Punkte ungleichmäfsiger Convergenz, dafs alle Punkte $\Omega \geqq k$ notwendig eine abgeschlossene Menge C_k bilden. Es ist also nur noch zu zeigen, dafs diese Menge nirgends dicht ist. Hierzu hat man die folgende auf der Definition beruhende Eigenschaft der Punkte $\Omega = k$ zu benutzen. Ist ξ ein solcher Punkt, nehmen wir zur Fixirung der Begriffe ξ als Häufungspunkt von Maximumswerten an, und wird $k' < k$ gewählt, so giebt es stets für unbegrenzt viele Werte $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_\lambda \cdots$ je ein nahe bei ξ liegendes Intervall $\vartheta_\lambda = \xi_\lambda' \cdots \xi_\lambda''$, so dafs für jeden Punkt ξ' dieses Intervalls (Fig. 6)

Fig. 6.

$$S_{\nu_\lambda}(\xi') > k'$$

ist[2]); zugleich müssen diese Intervalle mit wachsendem ν_λ gegen ξ und überdies ihre Breite gegen Null convergiren. Dagegen besteht für jeden Punkt x die Eigenschaft, dafs es keine Reihe wachsender Zahlen $\nu, \nu_1, \nu_2, \cdots \nu_\lambda, \cdots$ geben kann, so dafs x sämtlichen Intervallen

$$\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \cdots \vartheta_\lambda, \cdots,$$

die zu irgend welchen Punkten $\Omega \geqq k$ gehören mögen, zugleich angehörte, da sonst die Folge (3) für x nicht gegen Null convergirt.

1) Auf die Analogie zwischen der Verteilung der Punkte gleichmäfsiger und ungleichmäfsiger Convergenz und der Verteilung der Stetigkeitspunkte und Unstetigkeitspunkte wies bereits du Bois hin, Journ. f. Math. 100, S. 335. Er bezeichnet die Punkte $\Omega = 0$ als Stetigkeitspunkte der Convergenz, a. a. O. S. 336. Er setzt nämlich

$$s_\omega(x) - s_\nu(x) = \varrho_\nu(x) \cdot \Phi_\nu(x),$$

wo $\varrho_\nu(x)$ das Maximum von $s_\omega(x) - s_\nu(x)$ für jedes $\nu' \geqq \nu$ ist, $|\Phi_\nu(x)| \leqq 1$ ist und dem Wert 1 beliebig oft nahe kommen soll, und bezeichnet allgemein $\varrho_\nu(x)$ als den Stetigkeitsgrad der Convergenz. Wird dann $\varrho_\nu(x) = \varrho(\nu) \cdot \varrho_1(x)$ gesetzt, so ist die Convergenz gleichmäfsig, im Intervall $a \cdots b$, falls für jeden Wert dieses Intervalls $\varrho_1(x)$ endlich ist (S. 342). Die Festsetzungen stimmen der Sache nach mit denen des Textes überein.

Die von du Bois befolgte Methode ersetzt $s_\nu(x)$ durch eine Function zweier unbeschränkt veränderlicher Gröfsen x und $\varepsilon = 1/\nu$, die sogar auch für negative Werte ε betrachtet wird. Die hiergegen vorhandenen Bedenken habe ich schon erörtert (S. 199, Anm. 1). Übrigens ist diese Methode durchaus nicht identisch mit derjenigen von Baire (S. 233), der $s_\nu(x)$ in bestimmter und für die bezügliche Aufgabe zweckentsprechender Weise als Function zweier Veränderlichen ansieht, was natürlich eine ganz andere Auffassung ist.

2) In der Figur ist $\xi = 0$ der Punkt ungleichmäfsiger Convergenz.

Für jedes x giebt es daher ein gewisses ν, so dafs von diesem ν an $|S_\nu(x)| < \sigma$ ist, für beliebiges σ.

Nun sei τ' irgend ein Intervall auf $a \cdots b$, und in ihm ξ ein Punkt $\Omega \geqq k$, so giebt es sicher eine Zahl ν, so dafs das zu ξ gehörige Intervall ϑ_ν ebenfalls innerhalb τ' liegt. Im Intervall ϑ_ν sei alsdann ξ' ein Punkt $\Omega \geqq k$, so giebt es eine Zahl ν', so dafs das zu ξ' gehörige Intervall $\vartheta_{\nu'}$ innerhalb ϑ_ν liegt. Innerhalb $\vartheta_{\nu'}$ nimmt man dann den Punkt ξ'' aus der Menge der Punkte $\Omega \geqq k$ ebenfalls beliebig an. Fährt man so fort, so erhält man eine Reihe einander einschliefsender Intervalle

$$\vartheta_\nu, \ \vartheta_{\nu'}, \ \vartheta_{\nu''}, \ \cdots,$$

die mindestens einen Punkt x bestimmen, und für diesen Punkt x wäre

$$S_\nu(x) > k', \qquad S_{\nu'}(x) > k', \qquad S_{\nu''}(x) > k', \ \cdots,$$

was aber, wie wir noch eben bemerkten, unmöglich ist. Damit ist der Satz bewiesen. Als Folgerung ergiebt sich noch:

IV. Für jedes k bilden die Punkte $\Omega \geqq k$ eine nirgends dichte abgeschlossene Menge C_k, während die Punkte gleichmäfsiger Convergenz überall dicht liegen und eine Menge zweiter Kategorie bilden, die die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt.

Mit diesem Resultat ist man nun im stande, sich Functionen beliebiger ungleichmäfsiger Convergenz zu construiren. Man geht dazu von einer nirgends dichten Menge T aus und construirt für das Intervall δ_1 von $D = \{\delta_\nu\}$ eine Function $s_{1\omega}(x)$ mittels der Folge

$$s_{11}(x), \quad s_{12}(x), \cdots s_{1\nu}(x), \cdots$$

von der Art, dafs die Endpunkte von δ_1 Punkte ungleichmäfsiger Convergenz vom Grade $\Omega = k$ sind. Ebenso construirt man allgemein für δ_λ eine Function $s_{\lambda\omega}(x)$ mittels der Folge

$$s_{\lambda\lambda}(x), \quad s_{\lambda\lambda+1}(x), \cdots s_{\lambda\nu}(x), \cdots,$$

so dafs auch die Endpunkte von δ_λ Punkte $\Omega = k$ sind. Nunmehr setze man

$$s_1(x) = s_{11}(x), \quad s_2(x) = s_{12}(x) + s_{22}(x), \cdots$$
$$s_\nu(x) = s_{1\nu}(x) + s_{2\nu}(x) + \cdots + s_{\nu\nu}(x),$$

so ist leicht ersichtlich, dafs dies so geschehen kann, dafs jedes $s_\nu(x)$ eine stetige Function ist[1]). Zugleich hat die so bestimmte

1) Jedes $s_\nu(x)$ hat nur zwei Maxima der Gröfse k mehr als $s_{\nu-1}(x)$; darauf beruht die Behauptung. Ein einfaches geometrisch bestimmtes Beispiel ist das folgende. Über $\delta = \xi_l \cdots \xi_r$ errichte man ein gleichschenkliges Dreieck von der Höhe 1, so sei dies $s_1(x)$. Dies Dreieck ersetze man durch ein anderes der gleichen Höhe, dessen Spitze näher an



Function $s_\omega(x)$ alle Punkte von T zu Punkten $\Omega = k$. Beispiele dieser Art sind auch bei Osgood a. a. O. vorhanden, unter anderen auch solche, für die $\Omega = \infty$ ist.

4. Die wichtigste Anwendung, die Osgood von dem Satz macht, betrifft die gliedweise Integration. Beispiele dafür, dafs eine nicht gleichmäfsig convergente Reihe die gliedweise Integration nicht zuläfst, dafs also

$$\lim \int S_\nu(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int S_\omega(x)\,dx$$

nicht immer dasselbe Resultat ergeben, sind zuerst durch Darboux mitgeteilt worden[1]). In allen diesen Beispielen existirt ein Punkt $\Omega = \infty$. Es besteht nun die wichtige Thatsache, dafs in diesen Punkten die einzige Ursache der möglichen Verschiedenheit beider Grenzwerte zu sehen ist; mit anderen Worten, es gilt der Satz:

V. Eine nicht gleichmäfsig convergente Reihe, die eine stetige Function darstellt, gestattet die gliedweise Integration, falls die zugehörige Convergenzfunction überall endlich ist.

Der Beweis dieses Satzes, resp. der Gleichheit der beiden obigen Grenzwerte ergiebt sich nach Osgood folgendermafsen. Es werde k beliebig gewählt, und es sei wieder $D = \{\delta_\nu\}$ die zu C_k gehörige Intervallmenge, ferner sei $J(C_k) = \gamma$. Man bestimme nun zunächst wieder μ Intervalle δ_i, resp. innerhalb von ihnen die Intervalle δ_i' so, dafs

$$\delta_1' + \delta_2' + \cdots + \delta_\mu' > \tau - \gamma - \varepsilon$$

ist, und denke sich irgend eine Teilung des Gesamtintervalles τ in kleine Teile τ_i, und zwar mögen der Einfachheit halber alle Endpunkte der μ Intervalle δ_i' den Teilpunkten zugehören. Werden dann diejenigen Intervalle τ_i, die aufserhalb der Intervalle δ_i' liegen, durch $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \cdots \tau_\varrho$ bezeichnet, so ist

$$\sum_1^\varrho \tau_i + \sum_1^\mu \delta_i' = \tau, \quad \gamma < \sum \tau_i < \gamma + \varepsilon.$$

Aus der Definition der Menge $\mathfrak{M}\{C_k\} = \{\xi\}$ folgt nun, dafs es für

---

ξ_l gerückt ist, und errichte über $\delta_1 = \xi_l' \cdots \xi_r'$ ein gleichschenkliges Dreieck, ebenfalls mit der Höhe 1, so stellen beide zusammen $s_2(x)$ dar. Läfst man die Spitze des ersten Dreiecks wieder näher an ξ_l rücken, die des zweiten sich ξ_l' nähern, und errichtet über δ_2 ein gleichschenkliges Dreieck der Höhe 1, so ist dies die Function $s_3(x)$ u. s. w.; und es hat $s_\omega(x)$ in jedem Punkt der zugehörigen Menge T einen Punkt $\Omega = 1$. Es ist auch nicht schwer, analoge Functionen durch analytische Vorschriften herzustellen.

1) Ann. de l' Ec. norm. (2) 4, S. 84 (1875).

jeden ihrer Punkte ξ notwendig eine erste Zahl λ giebt, so daſs von diesem λ an

$$|S_\lambda(\xi)| \leqq \sigma$$

ist, bei beliebig gewähltem σ. Nun nehme man ν beliebig an, und es sei $C^{(\nu)} = \{\xi^{(\nu)}\}$ diejenige Teilmenge von $\{\xi\}$, so daſs für jeden Punkt $\xi^{(\nu)}$ vom Index ν an

$$|S_\nu(\xi^{(\nu)})| \leqq \sigma$$

ist. Ist dann τ_i eines der obigen λ Intervalle, und ist in ihm ein Punkt $\xi^{(\nu)}$ enthalten, so kann man, wie aus der Stetigkeit der Functionen $S_\nu(x)$ folgt, ein endliches Intervall τ' innerhalb τ_i wählen, so daſs für jeden Punkt x dieses Intervalls

$$|S_\nu(x)| \leqq \sigma + \sigma' < k$$

ist, bei beliebig vorgeschriebenem σ'. Ist nun N die obere Grenze aller Functionswerte von $S_\nu(x)$, und N' die obere Grenze derjenigen, die auf den Intervallen δ_i' liegen, und wird noch $\Sigma\tau = \Sigma\tau' + \Sigma\tau''$ gesetzt, so folgt

$$\int S_\nu(x)\,dx \leqq N' \sum \delta_i' + (\sigma + \sigma') \sum \tau' + N \sum \tau''.$$

Falls nun ν unbegrenzt wächst, so convergirt $\Sigma\tau''$ nach Satz IV von S. 91 gegen Null, während N' zuletzt unterhalb k bleiben muſs. Da nun aber auch k beliebig klein gewählt werden kann, so ist damit der Satz bewiesen. Der Beweis zeigt sogar auch, daſs die Integrale gleichmäſsig gegen $\int S_\omega(x)\,dx$ convergiren; er beruht überdies wesentlich darauf, daſs die Menge C_k abgeschlossen ist.

Durch Umkehrung folgen hieraus analoge Sätze für die gliedweise Differentiation.

Bei der Wichtigkeit des Osgood'schen Satzes teile ich noch einen zweiten elementaren Beweis mit, der auf einem Theorem von Arzelà[1]) beruht, das seiner allgemeinen Nützlichkeit halber hier erwähnt zu werden verdient. Es mögen

$$\Delta' = \{\delta'\}, \quad \Delta'' = \{\delta''\}, \quad \cdots \Delta^{(\nu)} = \{\delta^{(\nu)}\}$$

Intervallmengen sein, deren jede aus einer endlichen, übrigens auch unbegrenzt wachsenden Zahl getrennter Intervalle besteht, die sämtlich im Intervall $a \cdots b = \tau$ liegen, und zwar so, daſs jede Intervallsumme oberhalb einer Gröſse η liegt. Alsdann giebt es dem Satz von Arzelà zufolge mindestens einen Punkt x des Intervalls τ, der in unendlich vielen Intervallen der obigen Mengen enthalten ist. Wird nämlich ν so bestimmt, daſs $\nu\eta > \tau' > \tau$ ist, so wird es nach Bedeckung von τ mit den Intervallen der Mengen $\Delta', \Delta'', \cdots \Delta^{(\nu)}$

1) Rend. di Linc. (4) 1, S. 637.

mindestens ein Intervall τ_1 endlicher Gröſse geben, das mindestens zwei Intervallen δ angehört. Man kann dann ν_1 so bestimmen, daſs nach weiterer Bedeckung von τ mit den Intervallen der Mengen $\Delta^{(\nu+1)}, \dots \Delta^{(\nu_1)}$ mindestens ein Intervall τ_2 vorhanden ist, das in mindestens drei Intervallen δ liegt. So kann man weiter schlieſsen, und damit ist der Satz bewiesen. Hieraus folgt aber das Theorem unmittelbar. Ist nämlich jetzt $\Delta^{(\nu)}$ diejenige Intervallmenge, für die $S_\nu(x) > \sigma$ ist, und würde für irgend einen Wert von σ die Summe der Intervalle von $\Delta^{(\nu)}$ für unendlich viele Werte von ν oberhalb einer Gröſse η liegen, so gäbe es jetzt notwendig einen Punkt x, der in unendlich vielen Intervallen läge, und es würde daher die Relation $S_\nu(x) > \sigma$ für unendlich viele Werte von ν erfüllt sein, was unmöglich ist. Daher convergirt die Summe der Intervalle von $\Delta^{(\nu)}$ mit wachsendem ν gegen Null, welches auch der Wert von σ ist, woraus der Satz folgt.

5. Der hiermit bewiesene Satz ist vielfach Zielpunkt der Untersuchung gewesen. Bereits Kronecker[1]) hat sich über ihn gelegentlich geäuſsert, indem er ihm für den Fall Giltigkeit beilegte, daſs die Gesamtheit aller Mengen $\{C_k\}$ den Inhalt Null hat. Für diesen Fall ist der Satz sozusagen evident; einen Beweis hat später Hossenfelder[2]) gegeben, dessen Abhandlung eine Reihe zweckmäſsiger Beispiele enthält. Auch du Bois hat sich, wenn auch unbestimmt, zu dem Satz geäuſsert; es findet sich bei ihm die Bemerkung, daſs die Punkte $\Omega = 0$ überall dicht liegen müſsten, ohne daſs er jedoch den Sachverhalt vollständig erkannt hätte[3]). Am eingehendsten hat sich Arzelà[4]) mit dem Satz beschäftigt. Er suchte zunächst ganz allgemein die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daſs überhaupt $s_\omega(x)$ integrirbar ist, falls jedes $s_\nu(x)$ integrirbar ist, und glaubte sie darin zu finden, daſs einerseits die Menge der Punkte $\Omega \geqq k$ unausgedehnt ist, und andererseits auch die Menge der Punkte, die von einem bestimmten ν an für jedes $s_\nu(x)$ Punkte $\omega_\nu \geqq k$ sind. Er zeigte dann weiter, daſs, wenn eine Functionsfolge diese Eigenschaften hat, der Satz immer und nur dann besteht, wenn $s_\omega(x)$ eine stetige Function ist. Daſs diese Bedingung zu eng ist, ist durch den Osgood'schen Satz erwiesen[5]).

Ich muſs hier noch eines Irrtums erwähnen, der sich bei du Bois findet, und an dem man der Autorität des Namens wegen nicht ohne weiteres vorbeigehen darf. Du Bois hat a. a. O. ein

1) Ber. d. Berl. Ak. 1878, S. 54.

2) Programm Straſsburg in Westpreuſsen, 1891.

3) Ber. d. Berl. Ak. 1886, S. 241. Vgl. auch das folgende.

4) Rend. dell' Ac. dei Lincei (4) 1, S. 321, 532, 566. Vgl. Anm. 3 auf S. 225.

5) Arzelà hat sein Resultat später noch so präcisirt, daſs jedes Ω endlich sein müsse. Vgl. Rend. di Linc. (5) 6, S. 290.

Beispiel einer Function aufgestellt, bei der die Punkte $\Omega = \infty$ überall dicht liegen, was nach dem Satz III ausgeschlossen ist. Dieses Beispiel ist das folgende. Wird zunächst

$$\varphi_\nu(x) = \sum_\lambda \frac{1}{2^\lambda} \frac{\nu X_\lambda}{\nu^2 + X_\lambda^2}, \quad X_\lambda = \sin^2 \lambda \pi x$$

gesetzt, so ist $\varphi_\omega(x)$ eine Function, für die jeder rationale Punkt ein Punkt ungleichmäſsiger Convergenz ist, und zwar ist jede Menge C_k, wie leicht ersichtlich, endlich; für alle rationalen Zahlen der Form r/s hat Ω den nämlichen Wert, nämlich $^1/_2{}^s$.

Nun bildet du Bois weiter die Functionen

$$\psi'_\nu(x) = \sum_\lambda \frac{1}{2^\lambda} \frac{1}{1 + \nu^2 X_\lambda^2}, \quad \chi_\nu(x) = \sum_\lambda \frac{1}{2^\lambda} \frac{1}{(1 + \nu^2 X_\lambda)^\lambda}$$

und zeigt, daſs auch die Differenz $\psi_\omega(x) - \chi_\omega(x)$ analoge Eigenschaften besitzt wie $\varphi_\nu(x)$; er erhält dies, indem er für rationale Punkte

$$x = \frac{r}{s} + \frac{\varrho}{s}$$

setzt und nun x an den rationalen Punkt r/s so heranrücken läſst, daſs

$$\sin^2 \pi \varrho = \gamma_1^2 \varepsilon^2$$

gesetzt wird, wo γ_1 eine endliche Gröſse ist. Insoweit sind die Betrachtungen von du Bois einwandsfrei. Er bildet nun weiter die Function

$$s_\nu(x) = \frac{\psi_\nu(x) - \chi_\nu(x)}{\sqrt{\varphi_\nu(x)}}$$

und behauptet, daſs diese Function an jeder rationalen Stelle einen Punkt $\Omega = \infty$ besitze. Er schlieſst dies, indem er den Quotienten

$$\frac{\psi_\nu(x)}{\varphi_\nu(x)} = \frac{U + V}{U_1 + V_1}$$

setzt und von ihm nachweist, daſs diese Zerlegung immer so möglich ist, daſs $U_1 > U$ ist, und $V : V_1$ endlich ist. Hieraus schlieſst dann du Bois weiter, daſs auch die Quotienten

$$\frac{\psi_\nu(x)}{\varphi_\nu(x)} \quad \text{und} \quad \frac{\psi_\nu(x) - \chi_\nu(x)}{\varphi_\nu(x)}$$

niemals unendlich werden, und da ihre Zähler und Nenner einzeln für jedes x gegen Null convergiren, so gelte dies auch von $s_\nu(x)$. Dieser Schluſs würde aber in zwingender Form nur dann erlaubt sein, wenn die Gröſse $V : V_1$ stets unter einer endlichen Schranke bliebe, was sie jedoch nicht thut; ihre obere Grenze ist

vielmehr selbst unendlich. Hierin dürfte meines Erachtens der Irrtum des Beispiels enthalten sein.

6. Kann auf Grund der Osgood'schen Arbeit die Frage nach der Darstellung stetiger Functionen durch Fundamentalreihen stetiger Functionen als erledigt gelten, so hat R. Baire kürzlich das gleiche für die Darstellung punktweise unstetiger Functionen durch stetige geleistet. In dieser Richtung haben vorher so gut wie gar keine Vorarbeiten allgemeineren Charakters vorgelegen. Auf eine grofse Reihe von einzelnen Beispielen, in denen punktweise unstetige Functionen durch ungleichmäfsig convergente Reihen stetiger Functionen dargestellt werden, habe ich (S. 218) bereits hingewiesen. Eine allgemeinere Idee zur Bildung solcher Functionen benutzt Pringsheim[1]), indem er von Reihen ausgeht, die für einen gewissen Wert ξ der Variablen nur bedingt convergiren, und die Glieder der Reihen umordnet; es bleibt dann der Wert der Reihe überall erhalten, mit Ausnahme der Stelle ξ, an der eine hebbare Unstetigkeit entsteht. Für die Darstellung von Functionen mit einer abzählbaren Menge einfacher Sprünge hat O. Lebesgue[2]) eine einfache Methode angegeben. Er dehnt die Polygonapproximation (S. 218) auch auf diese Functionen aus, was ja ebenso zulässig ist wie bei den stetigen Functionen und auch hier zu den bezüglichen Polynomen führt, die gegen die Function convergiren. Der Vollständigkeit halber erwähne ich endlich eine kürzlich erschienene Arbeit von C. Severini[3]). Wenn die Gesamtmenge der Unstetigkeitspunkte der Function $f(x)$ unausgedehnt ist, so läfst sich mittels der von Weierstrafs benutzten Methode der Integraldarstellung unmittelbar zeigen, dafs man $f(x)$ längs der Intervalle $\delta_1', \delta_2', \cdots \delta_\nu'$ durch ein Polynom $G_\nu(x)$ approximiren kann, das $f(x)$ in diesen Intervallen beliebig nahe kommt. Wenn dann die Intervalle δ_ν' gegen δ_ν convergiren, so convergirt $G_\nu(x)$ gegen eine Function $G_\omega(x)$, die aber naturgemäfs nicht $f(x)$ zu sein braucht.

R. Baire's[4]) allgemeine Untersuchungen gehen von der schon oben erwähnten geometrischen Einkleidung aus, resp. von derjenigen Function $f(x, y)$, die für $y = y_\nu$ mit $s_\nu(x)$ übereinstimmt, für $y = y_{\nu+1}$ mit $s_{\nu+1}(x)$ und sich von y_ν zu $y_{\nu+1}$ linear ändert. Es ist also allgemein

$$f(x, y) = \frac{y_{\nu+1} - y}{y_{\nu+1} - y_\nu} s_\nu(x) + \frac{y_\nu - y}{y_{\nu+1} - y_\nu} s_{\nu+1}(x),$$

und die Aufgabe, die Baire sich stellt, geht nun darauf aus, eine

1) Math. Ann. 26, S. 167.
2) Vgl. Bull. des Sc. math. (2) 22, S. 278.
3) Rend. di Palermo, Bd. 14 (1900). Severini dehnt seine Untersuchungen dort auch auf Functionen von zwei Variablen aus.
4) Ann. di mat. (3) 3, S. 16 ff.

im ganzen Rechteck in Bezug auf x und y stetige Function $f(x, y)$ so zu bilden, dafs sie auf der x-Axe eine gegebene punktweise unstetige Function $g(x)$ darstellt. Läfst sich $f(x, y)$ in dieser Weise construiren, so existiren auch die gesuchten Functionen $s_\nu(x)$, für die $g(x)$ die Bedeutung der Function $s_\omega(x)$ besitzt. Falls sich für $g(x)$ auf diese Weise eine Fundamentalreihe stetiger Functionen $s_\nu(x)$ finden läfst, oder vielmehr, falls sich eine innerhalb des Rechtecks stetige Function $f(x, y)$ construiren läfst, die auf der x-Axe den Wert $g(x)$ hat, so soll $g(x)$ kurz als darstellbar im Intervall $\tau = a \cdots b$ bezeichnet werden. Alsdann gipfeln die Untersuchungen Baire's in folgendem Satz:

VI. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function $g(x)$ besteht darin, dafs es keine perfecte Menge giebt, in Bezug auf die die Function total unstetig ist[1]).

Der erste Teil des Satzes ist durch den Satz I bereits bewiesen, denn dieser Satz sagt aus, dafs $g(x)$ immer eine punktweise unstetige Function ist. Nun gelten aber, worauf immer wieder hingewiesen werden mufs, alle unsere Entwickelungen, die auf dem Stetigkeitsbegriff und auf dem Wesen der Fundamentalreihe beruhen, für die nirgends dichten perfecten Mengen in der gleichen Weise wie für das Continuum. Werden daher die stetigen Functionen $s_\nu(x)$ nur für eine Menge T ins Auge gefafst, also als Functionen $s_\nu(x, T)$, so kann auch $g(x)$ als Function $g(x, T)$ in T nur punktweise unstetig sein, woraus die Notwendigkeit der im Satz ausgesprochenen Bedingung erhellt.

7. Der zweite Teil des Satzes erfordert eine ausführliche und allmähliche Betrachtung.

Zunächst läfst sich leicht zeigen, dafs eine Function auf einem Intervall $a \cdots b$ darstellbar ist, wenn einer oder beide Endpunkte Unstetigkeitspunkte sind. Dies kann auf mannigfache Art geschehen; hier genüge es, eine einfache Methode zu wählen. Sei $aba'b'$ das

1) Es dürfte zweckmäfsig sein, die Bedeutung des Theorems zuvor durch ein einfaches Beispiel zu kennzeichnen Sei T eine perfecte Menge, und es möge $f(x) = 0$ sein in allen Punkten von T, sonst aber $f(x) = 1$. Alsdann kann man leicht Polygonzüge $s_\nu(x)$ zeichnen, die gegen die Function convergiren. Man wähle $s_1(x)$ so, dafs es über dem zu T gehörigen Intervall δ_1 durch ein gleichschenkliges Dreieck der Höhe 1 dargestellt wird, sonst aber Null ist. Dann möge $s_2(x)$ auf δ_1 durch zwei nebeneinanderstehende congruente gleichschenklige Dreiecke von der Höhe 1 dargestellt sein, auf δ_2 durch ein gleichschenkliges Dreieck der Höhe 1 und sonst Null sein u. s. w., so approximiren diese Polygonzüge gegen $f(x)$. Wird jetzt aber $f(x)$ so abgeändert, dafs die Function auch in T_g den Wert 1 hat und nur in T_l und T_r Null ist, so gelingt die Construction approximirender Polygonzüge nicht mehr; die Function ist jetzt nämlich total unstetig in T, während sie vorher in T constant war.

bezügliche Rechteck H (Fig. 7) und cc' eine zu aa' parallele Gerade. Alsdann bestimmen wir die Function $f(x, y)$ so, dafs auf aa' resp. bb'

$$f(a, y) = g(a), \quad f(b, y) = g(b)$$

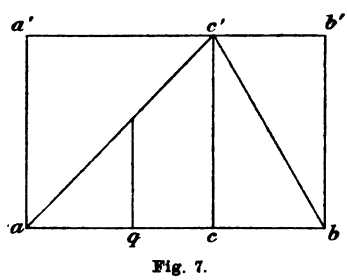


Fig. 7.

ist, dafs sie auf einer zu aa' parallelen Geraden, die im Punkt q von ab beginnt und auf einer Diagonalen ac' resp. bc' endigt, linear verläuft und in q den Wert $g(q)$ annimmt, im übrigen aber in den Dreiecken $aa'c'$ und $bb'c'$ in beliebiger Weise stetig verläuft. Dann ist $f(x, y)$ innerhalb und auf dem Umfang des Rechtecks bis auf die Punkte a und b eine stetige Function, die auf $a \cdots b$ mit $g(x)$ übereinstimmt, und damit ist die Darstellbarkeit von $g(x)$ dargethan. Diese eine Function $f(x, y)$ führt nun aber sofort zu unendlich vielen. Es ist nämlich auch

$$G(x, y) = f(x, y) + f_1(x, y)$$

eine solche Function, sobald $f_1(x, y)$ innerhalb und auf dem Umfang von H überall stetig und auf $a \cdots b$ Null ist. Es folgt hieraus noch, dafs man die Werte der zur Darstellung von $g(x)$ tauglichen Function auf aa' und bb' beliebig annehmen darf, falls sie nur in a und b mit $g(a)$ und $g(b)$ identisch sind. Wir bezeichnen irgend eine derartige Function von nun an durch $G(x, y)$.

Nun seien δ_1 und δ_2 zwei Intervalle, die ihren Endpunkt gemein haben, und es sei $g(x)$ sowohl auf δ_1, wie auch auf δ_2 darstellbar, so folgt das gleiche für das Gesamtintervall $\delta_1 + \delta_2$, und zwar unabhängig davon, ob in dem gemeinsamen Endpunkt eine einseitige oder beiderseitige Unstetigkeit vorhanden ist. Ebenso kann man von ν auf $\nu + 1$ schliefsen; es gilt aber auch der Schlufs von $\{\nu\}$ auf ω, resp. von $\{a_\nu\}$ auf a_ω. Wenn nämlich (Fig. 8) die Punkte $a_1, a_2, a_3, \cdots a_\nu, \cdots$ gegen a_ω convergiren, und wieder $a_1 a_1'$ und $a_\omega a_\omega'$ die zugehörigen Parallelen sind, so denke man sich eine beliebige Reihe gegen Null convergirender Strecken

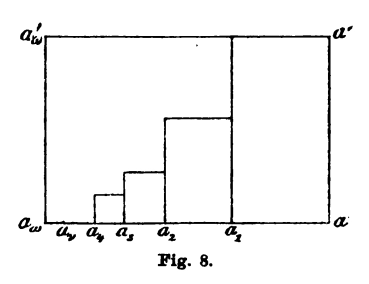


Fig. 8.

$$h_1 > h_2 > \cdots > h_\nu, \cdots,$$

errichte über $a_1 a_2$ ein Rechteck der Höhe h_1, ebenso über $a_2 a_3$ ein

solches der Höhe h_2 u. s. w. und bestimme in ihnen die Functionen $G_1(x, y)$, $G_2(x, y)$, $\cdots$ wie soeben angegeben und überdies so, dafs sie auf der gemeinsamen Seite zweier Rechtecke je denselben Wert haben. Sei nun wieder $G(x, y)$ die so definirte Gesamtfunction. In dem von diesen Rechtecken freien Teil von H kann man dann noch die Function $G(x, y)$ so definiren, dafs sie überall stetig nach y ist, auf jeder zur Grundlinie parallelen Geraden stetig nach x und auf der Geraden $a_\omega a'_\omega$ in a_ω den Wert $g(a_\omega)$ annimmt. Es hat also in der That $G(x, y)$ die verlangte Eigenschaft. Diese Methode überträgt sich ebenso auf Grenzpunkte höherer Ordnung, und es folgt zunächst:

VII. Ist die Function $g(x)$ auf jedem Intervall δ_ν einer Menge $D = \{\delta_\nu\}$ darstellbar, deren Endpunkte eine endliche oder abzählbar unendliche Punktmenge bestimmen, so ist $g(x)$ auch auf dem Gesamtintervall darstellbar.

Das hiermit benutzte Constructionsverfahren versagt, wenn die Unstetigkeitspunkte nicht in abzählbarer nirgends dichter Menge vorhanden sind; nichtsdestoweniger gilt der Satz aber auch dann. Wir betrachten zunächst den einfacheren Fall, dafs die Unstetigkeitspunkte von $g(x)$ eine perfecte Menge T bilden. Den Bedingungen des Satzes VI gemäfs wollen wir dann zunächst die Annahme machen, dafs $g(x)$ eine in T stetige Function ist. Nun sei $l(x)$ diejenige streckenweise lineare Function, die in T mit $g(x)$ übereinstimmt, so dafs $g(x, T) = l(x, T)$ ist, so ist $l(x)$ im ganzen Intervall $a \cdots b = \tau$ stetig, und es ist

$$f(x) = g(x) - l(x)$$

eine in T stetige, auf τ punktweise unstetige Nullfunction, die in T überall den Wert Null hat. Die Aufgabe ist damit darauf zurückgeführt, die Darstellbarkeit für $f(x)$ nachzuweisen. Wird nämlich die zu $f(x)$ gesuchte Function mit $F(x,y)$ bezeichnet, und ist $L(x,y)$ die immer existirende Function, die zu $l(x)$ gehört, so ist

$$G(x, y) = F(x, y) + L(x, y)$$

eine Function, die der Aufgabe genügt.

Eine Function $F(x, y)$ kann aber leicht auf folgendem Wege gebildet werden. Sei $D = \{\delta_\nu\}$ die in τ liegende, der Gröfse nach geordnete Intervallmenge, und seien die Gröfsen h_ν bestimmt wie kurz zuvor, so errichte man über jedem Intervall δ_ν ein Rechteck H_ν von der Höhe h_ν und denke sich $f(x)$ in H_ν so dargestellt, dafs $F(x, y)$ auf dem Umfang mit Ausnahme der inneren Punkte von δ_ν Null ist. Wenn dann noch in allen Punkten des Rechtecks H, die nicht einem Rechteck H_ν angehören, $F(x, y) = 0$ gesetzt wird, so ist damit $F(x, y)$ eine Function, die in H überall stetig nach y und mit Ausnahme der Strecke τ auch stetig nach x ist und auf τ mit $f(x)$ übereinstimmt. Also folgt zunächst:

VIII. Ist die Function $f(x)$ in Bezug auf die perfecte Menge T stetig, und ist sie auf jedem zu T gehörigen Intervall δ_ν darstellbar, so ist sie auch auf dem Gesamtintervall τ darstellbar.

Um den Satz VI in seiner Vollständigkeit abzuleiten, bedarf es jetzt nur noch des folgenden Hilfssatzes, der ebenfalls auf Baire zurückgeht[1]). Hat die Function $f(x)$ für jeden inneren Punkt eines Intervalles τ die Eigenschaft, dafs $\omega < k$ ist, so läfst sich für jeden inneren Punkt

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

setzen, so dafs $f_1(x)$ stetig ist und $0 \leqq f_2(x) \leqq k$ ist. Auch dieser Satz besteht in analoger Weise für eine nur in T definirte Function $f(x, T)$.

Sei nunmehr $g(x)$ irgend eine punktweise unstetige Function, die den Bedingungen des Satzes VI genügt, so dafs sie für keine perfecte Menge total unstetig ist, und sei K die Menge der Punkte $\omega \geqq k$. Diese Menge kann einen perfecten Bestandteil $K^\Omega = T$ besitzen; alsdann ist $g(x, T)$ in T höchstens punktweise unstetig, und es sei K_1 die Menge der Punkte $\omega_T \geqq k$. Besitzt auch K_1 einen perfecten Bestandteil $K_1^\Omega = T_1$, so sei für $g(x, T_1)$ als Function in T_1 jetzt K_2 die Menge der Punkte $\omega_{T_1} \geqq k$. So können wir fortfahren, der Procefs führt aber, wie näher auf S. 142 entwickelt ist, nach einer höchstens abzählbaren Menge von Schritten zum Ende. Wir gelangen so zu den Mengen

$$K, T, K_1, T_1, \cdots \quad K_\omega, T_\omega, \cdots \quad K_\alpha, T_\alpha, \cdots \quad K_\beta,$$

und zwar ist entweder K_β endlich resp. abzählbar, oder aber es ist, wenn K_β perfect ist, dem Satze VI gemäfs $g(x, K_\beta)$ eine in K_β stetige Function. Wir bezeichnen noch die zu $T, T_1, \cdots T_\omega, \cdots$ gehörenden Intervallmengen durch

$$D = \{\delta\}, \quad D_1 = \{\delta'\}, \cdots \quad D_\omega = \{\delta^{(\omega)}\}, \cdots.$$

Der Erfolg der weiteren Entwickelungen beruht nun im wesentlichen darauf, dafs man die Function $g(x)$ der Reihe nach durch die Functionen

$$g(x), \; g(x, T), \; g(x, T_1), \cdots g(x, T_\nu), \cdots g(x, T_\alpha), \cdots$$

ersetzt, wo jede dieser Functionen nur für diejenigen Werte von x in Frage kommt, die nicht einer der in den folgenden Functionen auftretenden Mengen T_ν angehören. Hierfür mögen folgende Andeutungen genügen.

Es soll zunächst gezeigt werden, dafs man

$$g(x) = g_1(x) + h_1(x)$$

1) a. a. O., S. 57.

so setzen kann, dafs $g_1(x)$ auf τ darstellbar ist und überall

$$0 \leqq h_1(x) \leqq k$$

ist. Dies erreicht man folgendermafsen. Sei δ_i ein Intervall von T, in dessen Innerem Punkte von K liegen, so dafs es durch diese Punkte in die Intervalle

$$\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \cdots \delta_{ik}, \cdots$$

zerfalle. Alsdann ist innerhalb jedes Intervalles δ_{ik} überall $\omega < k$, und man kann daher dem Hilfssatz zufolge $g(x)$ innerhalb δ_{ik} so zerlegen, dafs $g_1(x)$ stetig ist und $h_1(x)$ der obigen Relation genügt. Damit ist die Zerlegung von $g(x)$ für die inneren Punkte der Intervalle δ_{ik} bereits vorgeschrieben. Setzt man jetzt in den Endpunkten von δ_{ik} noch

$$g_1(x) = g(x), \quad h_1(x) = 0,$$

so ist die Zerlegung von $g(x)$ für alle inneren Punkte von δ_i ausgeführt und damit für alle Punkte der Complementärmenge von T, und es wird zugleich, welche Werte auch $g_1(x)$ in den Endpunkten von δ_i noch erhalten mag, $g_1(x)$ auf jedem Intervall δ_i nach Satz VII darstellbar sein.

Um nunmehr die noch ausstehende Zerlegung von $g(x)$ in den Punkten von T zu bewerkstelligen, betrachten wir weiter $g(x)$ als Function $g(x, T)$ in T, und es sei δ_i' ein solches Intervall von D_1, auf dem Punkte von K_1 vorhanden sein sollen. Dadurch zerfalle es in die Teilintervalle

$$\delta_{i1}', \delta_{i2}', \delta_{i3}', \cdots \delta_{ik}', \cdots,$$

so kann ein Intervall δ_{ik}' in seinem Innern noch eine Teilmenge U von T enthalten. Es ist aber für die Punkte von U der Annahme nach $\omega_T < k$, und wir können daher dem Hilfssatz gemäfs für diese Punkte den Wert von $g_1(x, T)$ so bestimmen, dafs $g_1(x, T)$ stetig in Bezug auf U ist, und $h_1(x, T)$ seiner Relation genügt. Setzt man nun wieder in den Endpunkten von δ_{ik}'

$$g_1(x, T) = g(x), \quad h_1(x, T) = 0,$$

so ist damit die verlangte Zerlegung von $g(x)$ innerhalb δ_i' so ausgeführt, dafs $g_1(x, T)$ und damit auch $g_1(x)$ auf δ_i' darstellbar wird[1]). Dies ergiebt sich ebenso wie oben, und wir haben damit die Zerlegung bereits für alle Punkte der Complementärmenge von T_1 durchgeführt.

In dieser Weise kann man nun aber fortfahren, bis man zur Menge K_β gelangt, und wie auch diese Menge beschaffen sein mag,

1) Es ist gleichgiltig, ob man $g_1(x)$ hier als Function in T betrachtet oder nicht; das wesentliche ist, dafs es nur auf diejenigen Werte ankommt, die die Function in den bezüglichen Punkten von T besitzt.

so läfst sich die analoge Zerlegung auch für sie ausführen; es ist ja, falls K_β perfect ist, $g(x, K_\beta)$ als Function in K_β eine stetige Function. Die verlangte Zerlegung ist damit für alle Punkte von τ so geleistet, dafs $g_1(x)$ darstellbar ist.

Nunmehr kann man mit $h_1(x)$ in derselben Weise verfahren. Für $h_1(x)$ ist jetzt überall $\omega_h \leqq k$, und man kann nun

$$h_1(x) = g_2(x) + h_2(x)$$

setzen, und es ist wesentlich, dafs man sogar erreichen kann, dafs

$$0 \leqq g_2(x) \leqq \frac{k}{2}, \quad 0 \leqq h_2(x) \leqq \frac{k}{2}$$

ist und $g_2(x)$ auf τ darstellbar ist[1]). So kann man fortfahren und gelangt schliefslich zu der Gleichung

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) + \cdots g_\nu(x) + \cdots,$$

in der alle $g_\nu(x)$ darstellbar sind, und deren Reihe für jedes x gleichförmig convergirt. Analog existirt also eine Reihe

$$G(x, y) = G_1(x, y) + G_2(x, y) + \cdots G_\nu(x, y) + \cdots,$$

die ebenfalls gleichförmig convergirt. Mit der Existenz von $G(x, y)$ ist aber der Satz bewiesen.

Insbesondere folgt also, dafs alle die vielen Functionen, für die die Menge K für jedes k endlich ist (S. 136), darstellbar sind.

8. Die vorstehenden Entwickelungen haben Baire[2]) zu folgender weiteren Einteilung der unstetigen Functionen geführt. Rechnet man die stetigen Functionen in die Klasse 0, so kann man als erste Klasse der unstetigen Functionen diejenigen betrachten, die sich als Folgen stetiger Functionen darstellen lassen. Falls nun eine Folge von Functionen der Klasse 0 oder 1 nicht selbst eine Function dieser Klassen bestimmt, so soll die durch sie definirte Function als eine Function der Klasse 2 bezeichnet werden. Eine solche Function $F(x)$ läfst sich dann der Definition gemäfs als Doppelfolge stetiger Functionen darstellen, also

$$F(x) = \sum_\mu \sum_\nu g_{\mu,\nu}(x),$$

wobei jedoch die Summation nicht beliebig ist, sondern so auszuführen, dafs erst über ν und dann über μ summirt wird. Ein einfaches Beispiel dieser Klasse bildet diejenige total unstetige Function, die für rationales x den Wert 1 hat und für irrationales gleich Null ist[3]). In dieser Weise kann man mit der Definition von

1) Dies beruht darauf, dafs die Gröfse k des Hilfssatzes beliebig ist.
2) a. a. O., S. 68.
3) Eine solche Darstellung durch eine Doppelreihe findet sich für ein einzelnes specielles Beispiel auch bei Lerch, Giorn. di mat. 26, S. 375.

Functionsklassen weitergehen und zu Functionen beliebiger endlicher und transfiniter Klasse gelangen; immer soll eine Function, die als Folge von Functionen der Klassen 0 bis ν definirt ist, ohne einer dieser Klassen anzugehören, eine Function der Klasse $\nu + 1$ darstellen.

Hiermit ist jedoch nicht etwa nur ein formales Programm entworfen. Vielmehr hat Baire auch bereits den Functionen der zweiten Klasse eine eingehende Untersuchung gewidmet. Er knüpft sie an die leicht ersichtliche Thatsache, dafs, wenn man die Werte einer Function der Klasse 1 für eine endliche Menge ändert, die Function eine solche der Klasse 1 bleibt, wenn man sie aber an einer abzählbaren Menge ändert, eine Function entsteht, die höchstens der Klasse 2 angehört. Dies führt wieder darauf, dafs man bei Functionen der Klasse 2 von gewissen abzählbaren Wertmengen absehen darf. Ist nämlich λ irgend ein Wert, den die Function im Intervall $\tau = a \cdots b$ besitzt, so giebt es für jedes λ eine Punktmenge $P_\lambda = \{x_\lambda\}$, so dafs $f(x_\lambda) \geqq \lambda$ ist. Diese Menge kann abzählbar sein, es giebt aber eine untere Grenze der Zahlen λ mit abzählbarer Menge P_λ, und diese sei g. Ebenso sei l die obere Grenze aller Zahlen μ, für die die zugehörige Punktmenge $P_\mu = \{x_\mu\}$ abzählbar ist, wo $f(x_\mu) \leqq \mu$ sein soll. Diese zunächst für ein Intervall definirten Zahlen kann man nun in bekannter Weise auf einen Punkt x übertragen, indem man sich Intervalle $\tau', \tau'', \tau''', \cdots$ denkt, die gegen den Punkt x convergiren. Sind $g', g'', g''', \cdots l', l'', l''', \cdots$ die eben definirten zugehörigen Gröfsen und g_1 und l_1 die bezüglichen Grenzen, so setze man

$$\omega_1(x) = g_1 - l_1 = k_1$$

und hat in dieser Gröfse ω_1 für die Functionen zweiter Klasse ein Analogon zu der bei Functionen erster Klasse vorhandenen Gröfse ω. Diese Analogie besteht in folgendem. Bei einer beliebigen punktweise unstetigen Function liegen die Punkte $\omega = 0$ überall dicht; insbesondere haben daher die Functionen der Klasse 1 die Eigenschaft, dafs für jede beliebige perfecte Menge T die Punkte $\omega_T = 0$ überall dicht liegen. Baire zeigt nun, dafs es, damit $f(x)$ eine Function der Klasse 2 ist, hinreichend ist, falls die Punkte $\omega_1 = 0$ für jede nirgends dichte perfecte Menge T überall dicht liegen. Eine notwendige Bedingung ist dies jedoch nicht[1]). Um zu notwendigen

Vgl. auch bei Pringsheim, Encykl. d. math. Wiss. II, A. 1, S. 7, Anm. 31. Die mir sonst bekannten analytischen Darstellungen total unstetiger Functionen benutzen nur einfache Folgen nicht stetiger Functionen; vgl. z. B. Hankel, Math. Ann. 20, S. 107.

1) Dies wird durch folgendes Beispiel bewiesen: Sei T eine nirgends dichte perfecte Menge, so setzt man in jedes Intervall δ_i wiederum eine perfecte Menge. So entsteht eine perfecte Menge T_1, in deren Intervalle wird wieder eine perfecte Menge gesetzt und so eine Menge T_2 gebildet.

Bedingungen zu gelangen, mufs man nicht allein von abzählbaren Mengen absehen, sondern auch von Mengen erster Kategorie (S. 108), die durch $\mathfrak{M}\{K_\nu\}$ gegeben sind, wo jedes K_ν eine nirgends dichte abgeschlossene Menge ist. Mit ihnen definirt man analog wie oben Zahlen ω_2, g_2, l_2, k_2 und gelangt schliefslich zu folgendem Satz:

IX. Bei jeder Function der zweiten Klasse liegen die Punkte $\omega_2 = 0$ in Bezug auf jede perfecte Menge überall dicht[1]).

Man kann fragen, ob und wie sich die Baire'schen Untersuchungen auf das Gebiet mehrerer Variablen übertragen lassen. Dies dürfte sich ohne besondere Schwierigkeit ausführen lassen, nachdem die Analyse der ebenen abgeschlossenen und perfecten Mengen vorhanden ist; auch dürften neue Gesichtspunkte principieller Natur kaum hervortreten; sind doch die Methoden, auf denen die Entwickelungen ruhen, von der Dimensionenzahl durchaus unabhängig[2]). Ferner hat Baire in allerjüngster Zeit begonnen, die Menge aller Functionen der oben genannten Klassen näher zu untersuchen. Hierzu dienen die auf S. 64 angegebenen, von ihm eingeführten Begriffe, die es ermöglichen, die Resultate der Punktmengen auf Mengen von Functionen zu übertragen. Beispielsweise kann man diejenige Functionsklasse als abgeschlossen bezeichnen[3]), die aus allen Functionen der sämtlichen Klassen

$$1, 2, 3, \ldots \omega, \ldots \alpha, \ldots$$

besteht. Sind nämlich

$$f\alpha, f\alpha_1, f\alpha_2, \ldots f\alpha_\nu, \ldots$$

irgend welche Functionen dieser Art, so definiren sie eine Function $f\alpha_\omega$, die man als Grenzelement der vorstehenden betrachten kann (S. 64), und die gemäfs der Natur der zweiten Zahlklasse stets der Gesamtheit aller dieser Functionen angehört.

Wir sind übrigens hiermit zu einer Fragestellung allgemeiner Art gelangt, nämlich zu der Frage, Mengen gegebener Functionen auf ihre Mächtigkeit und ihre Eigenschaften zu untersuchen. Auf die

---

So kann man fortfahren und die Mengen T_ν die Strecke τ allmählich überall dicht erfüllen lassen. Sei $\mathfrak{M}\{T_\nu\} = P = \{x_p\}$, so definire man $f(x_p) = 1$, sonst aber $f(x) = 0$, so ist $f(x)$ eine Function zweiter Klasse, und man hat überall $g_1 = 1$, $k_1 = 0$, $\omega_1 = 1$, so dafs $f(x)$ die obige Bedingung nicht erfüllt, wohl aber diejenige des letzten Satzes.

1) a. a. O., S. 87. Der Satz findet sich in den Compt. rend. de l'Ac. de Paris, 126, S. 1621 zuerst ausgesprochen.

2) Auf Erwägungen ganz anderer Natur sich stützend hat kürzlich H. Lebesgue die Ausdehnbarkeit des Satzes auf den Raum ausgesprochen. (Compt. rend. de l'Ac. de Paris, Bd. 128, 1899.)

3) Compt. rend. de l'Ac. de Paris, Bd. 129, (1899).

Wichtigkeit dieser Frage ist bereits mehrfach hingewiesen worden[1]). Sie enthält das allgemeine Problem unter sich, Mengen von Curven und sonstigen geometrischen Gebilden zu untersuchen, das von Ascoli, Volterra und Arzelà bereits in Angriff genommen ist. Hierfür mufs ich auf den nächsten Abschnitt meines Berichts verweisen[2]).

9. Es möge nunmehr die Reihe der Functionen

$$s_1(x),\ s_2(x), \ldots\ s_\nu(x), \ldots$$

nicht mehr für jedes x eine Fundamentalreihe darstellen, also die Reihe $\Sigma u_\nu(x)$ nicht mehr für jedes x convergiren. Wir wollen auch dann noch die Reihe eine Folge oder Fundamentalreihe von Functionen nennen, falls die Punkte, an denen sie convergirt, eine überall dichte Menge bilden, wobei freilich die Natur dieser Menge noch zu untersuchen ist. Wenn die Reihe für einen Wert nicht convergirt, so kann dies entweder so geschehen, dafs die Gröfsen $s_\nu(x)$ mit wachsendem ν über alle Grenzen wachsen, oder dafs sie zwischen endlichen Grenzen oscilliren. Es giebt dann zwei Unbestimmtheitsgrenzen O und U für diese Oscillationen, und es soll, falls die Differenz $\varDelta = O - U = k$ ist, diese Gröfse als das Divergenzmafs $\varDelta = k$ im Punkte x bezeichnet werden. Diese Einführung stammt von Harnack[3]). Analog dazu soll ein Punkt x, in dem die Reihe divergirt, ein Punkt unendlicher Divergenz heifsen, oder auch ein Punkt $\varDelta = \infty$. Man kann nun wieder fragen, wie die Punkte $\varDelta \geqq k$ in einem Intervall verteilt sein können. Hierauf kann man zunächst nur antworten, dafs ihre Menge nicht abgeschlossen zu sein braucht.

Bezeichnen wir noch eine Reihe, bei der die Convergenzpunkte überall dicht liegen, als punktweise convergent, so gilt also der Satz:

X. Die Punkte $\varDelta \geqq k$ einer punktweise convergenten Reihe brauchen eine abgeschlossene Menge nicht zu bilden.

Die Divergenzpunkte zeigen also in dieser Hinsicht ein analoges Verhalten wie die Werte der Ableitungen.

Diese Übereinstimmung ist übrigens nicht etwa eine nur formale; vielmehr haben wir es hier, wie aus dem folgenden erhellt, mit zwei verschiedenen Erscheinungsweisen der nämlichen Thatsache zu thun.

Um dies zu begründen, genügt es daran zu erinnern, dafs die früher über die Ableitungen stetiger Functionen entwickelten Eigenschaften ein typisches Beispiel des behaupteten Satzes liefern, zumal wenn man die in Cap. 4 benutzten Darstellungsmethoden im Sinne von S. 218 auffafst. Wir haben in Cap. 4 monotone stetige Functionen $y = f(x)$ kennen gelernt, für die an einer im Intervall $a \ldots b$ überall

1) Vgl. z. B. Borel, Leçons, S. 126 ff., sowie die Verhandl. d. Züricher math. Congresses, S. 201 ff.

2) Vgl. auch die Arbeit von Burali Forti in Math. Ann. 47, S. 20.

3) Math. Ann. 19, S. 251.

dichten Menge $f'(x) = 0$ war. Wir brauchen aber jetzt von der Function $y = f(x)$ nur zu der inversen, ebenfalls eindeutigen monotonen und stetigen Function $x = g(y)$ überzugehen und sehen sofort, dafs diese Function ein Beispiel liefert, in dem die Punkte $\Delta = \infty$ im Intervall $f(a) \ldots f(b)$ überall dicht liegen, ohne doch alle Punkte dieses Intervalls zu enthalten. Denken wir uns nämlich $f(x)$ durch die monotonen Polygonzüge

$$l_1, l_2, \ldots l_\nu, \ldots$$

approximirt, so stellen sie für $g(y)$ ebenfalls monotone Polygonzüge

$$m_1, m_2, \ldots m_\nu, \ldots$$

dar, die gegen $g(y)$ gleichmäfsig approximiren; sie bilden daher eine Functionsfolge, bei der die Punkte $\Delta = \infty$ eine überall dichte, aber nicht abgeschlossene Menge bilden[1]).

10. Den wichtigsten und interessantesten Beleg des Satzes bildet eine bemerkenswerte Gattung punktweise convergenter Reihen, die Borel[2]) betrachtet hat, und bei denen ebenfalls die Divergenzpunkte $\Delta = \infty$ überall dicht liegen[3]). Borel ist zu ihnen gelangt, indem er eine im complexen Gebiet vielfach erörterte Functionsklasse zunächst für reelle Variablen untersuchte, um sie auf diese Weise in ihrer einfachsten Form zu studiren.

Es sei $X = \{x_\nu\}$ eine im Intervall $a \ldots b = \tau$ überall dichte abzählbare geordnete Menge. Man wähle ΣA_ν als absolut convergente Reihe, bezeichne den Abstand eines Punktes x von x_ν durch r_ν und betrachte die Reihe

$$(4) \quad \sum \frac{A_\nu}{|x - x_\nu|} = \sum \frac{A_\nu}{r_\nu} = \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} + \cdots + \frac{A_\nu}{r_\nu} + \cdots$$

Diese Reihe ist für jeden Punkt x_ν unendlich grofs. Es fragt sich nun weiter, wie sie sich für einen Punkt von X_g verhält, wo X_g wieder die Complementärmenge zu X ist. Ist x dieser Punkt, so kann die Reihe für x in der That convergiren, und zwar wird dies jedenfalls immer dann der Fall sein, wenn die A_ν der Bedingung genügen, dafs für hinreichend grofses ν stets

$$\frac{A_\nu}{r_\nu} < u_\nu$$

1) Ein ähnliches analytisch eingekleidetes Beispiel dieser Art giebt Brodén, Öfv. af Vet. Ak. Förhandl., Stockholm, Bd. 52, S. 763. Es ist zu vermuten, dafs die Punkte $\Delta = \infty$ für eine punktweise convergente Reihe, falls sie in einem Intervall überall dicht liegen, in ihm stets eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ bilden, was dem oben folgenden analog sein würde.

2) Compt. rend. de l'Ac. de Paris 118, S. 540 und Leçons, S. 62ff.

3) Solche Reihen hat im Anschlufs an Riemann auch H. J. Smith betrachtet, Mess. of Math. (2) 11, S. 1.

ist, wo Σu_ν selbst eine convergente Reihe darstellt. Diese Bedingung ist aber auch wirklich realisirbar. Es ist dies, wie wir sehen werden, eine einfache Folge des oben (S. 93) angeführten Borel'schen Satzes, wie andererseits hier der eigentliche Zielpunkt dieses Satzes in die Erscheinung tritt.

Man setze nämlich die letzte Relation in die Form

$$r_\nu > \frac{A_\nu}{u_\nu} = v_\nu,$$

so besagt die Bedingung $r_\nu > v_\nu$, dafs x nicht dem Intervall $\varepsilon_\nu = x_\nu - v_\nu \cdots x_\nu + v_\nu$ angehört. Wenn man nun die ε_ν so bestimmen kann, dafs $\Sigma\varepsilon_\nu < \tau$ ist, so bestimmen die Intervalle ε_ν eine Borel'sche Menge (S. 110), nämlich eine Intervallmenge $D = \{\delta_\nu\}$ und eine zugehörige Menge T, und es ist unmittelbar klar, dafs für jeden Punkt von T die Reihe (4) immer dann convergirt, wenn auch die Reihe Σv_ν convergirt. Ja es wird sich sogar durch geeignete Wahl der Gröfsen v_ν erreichen lassen, dafs $\Sigma\delta_\nu$ beliebig klein wird und damit der Inhalt der zugehörigen abgeschlossenen Menge T dem Wert τ beliebig nahe kommt. Da nämlich mit Σu_ν auch $\Sigma g u_\nu$ eine convergente Reihe ist für jede endliche Gröfse g, so bleiben alle unsere Schlüsse bestehen, wenn man v_ν durch $v_\nu : g$ ersetzt. Dadurch kann aber $\Sigma\delta_\nu$ beliebig klein gemacht werden, und es kann daher die Summengröfse der Intervalle, für die die Convergenz nicht behauptet werden kann, beliebig heruntergedrückt werden. Nimmt man insbesondere eine Reihe unbegrenzt wachsender Zahlen

$$g < g_1 < g_2 < \cdots < g_\nu \cdots$$

beliebig an, so werden die zugehörigen Mengen

$$T,\ T_1,\ T_2,\ \ldots\ T_\nu,\ \ldots$$

das Intervall τ allmählich überall dicht bedecken und in ihrer Complementärmenge eine Menge M zweiter Kategorie bestimmen, und man gelangt so zu folgendem bemerkenswerten Resultat:

XI. Falls sich bei gegebener convergenter Reihe ΣA_ν die Gröfsen u_ν und v_ν so wählen lassen, dafs Σu_ν und Σv_ν ebenfalls convergirt, so convergirt die Reihe (4) sicher überall mit Ausnahme einer Menge M der zweiten Kategorie und der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$[1]).

Aus der Definition dieser Punktmenge M folgt jedoch nicht unmittelbar, dafs sie aus lauter Punkten $\Delta = \infty$ bestehen mufs.

Das bisherige Resultat ist zunächst noch hypothetischer Natur, es läfst sich aber leicht in ein wirkliches Resultat verwandeln.

1) Der analoge Satz im complexen Gebiet ist wichtig für die Frage, ob eine Gebietsgrenze, auf der unendlich viele überall dichte singuläre Punkte liegen, eine natürliche Grenze ist oder nicht.



Man hat dazu zu fragen, wie die Reihe ΣA_ν beschaffen sein mufs, damit zwei convergente Reihen Σu_ν und Σv_ν der vorbestimmten Art existiren. Zu dem Zweck geht Borel von der Relation

$$\sqrt{A_\nu} = \sqrt{u_\nu v_\nu} \leqq \frac{u_\nu + v_\nu}{2}$$

aus, die zeigt, dafs die Convergenz von Σu_ν und Σv_ν diejenige von $\Sigma \sqrt{A_\nu}$ nach sich zieht; umgekehrt aber, falls $\Sigma \sqrt{A_\nu}$ convergirt, genügt es,

$$u_\nu = v_\nu = \sqrt{A_\nu}$$

zu setzen, um zwei Reihen der verlangten Beschaffenheit zu besitzen. Also folgt:

XII. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Reihen Σu_ν und Σv_ν ist die Convergenz von $\Sigma \sqrt{A_\nu}$.

Die vorstehenden Sätze lassen sich einerseits so verallgemeinern, dafs man

$$\sum \frac{A_\nu}{r_\nu} \text{ durch } \sum \frac{A_\nu}{r_\nu^{m\nu}}$$

ersetzt, unter der Voraussetzung, dafs alle $m_\nu < N$ bleiben, oder auch so, dafs man sie auf die Ebene und den Raum C_μ überträgt. Dies gilt immer, falls nur die Menge $P = \{p_\nu\}$, die statt der Menge $X = \{x_\nu\}$ eintritt, abzählbar bleibt; man braucht ja r_ν nur entsprechend zu interpretiren. Hier tritt dann, wie leicht ersichtlich, an die Stelle der Reihe Σv_ν die Reihe Σv_ν^2 resp. allgemein die Reihe Σv_ν^μ. Der Inhalt von T läfst sich ebenso wählen, wie oben.

Borel fügt noch die leicht ersichtliche Bemerkung hinzu, dafs die Reihe für alle Punkte derselben Menge T gleichmäfsig convergent ist, da ja für sie eine und dieselbe Menge Σv_ν die Vergleichsreihe abgiebt[1]). In der Ebene kann es alsdann auch Scharen von Curven geben, deren sämtliche Punkte einer Menge T_λ angehören, und auf denen die Reihe ebenfalls noch gleichmäfsig convergirt. Die Möglichkeit solcher Curven für nirgends dichte Mengen T ist leicht beweisbar[2]).

11. Harnack hat den Begriff des Divergenzmafses für die Zwecke der trigonometrischen Reihe eingeführt; diese Einführung bildet

1) Mit wachsendem λ sinkt natürlich der Grad dieser Convergenz unter jede Gröfse.

2) Das nähere im vierten Abschnitt. Ein ähnliches Resultat enthält der von Cantor gelegentlich gegebene Nachweis, dafs eine stetige Bewegung im Raum auch dann noch möglich ist, falls man aus ihm eine überall dichte abzählbare Menge ausscheidet. (Math. Ann. 20, S. 121.)

aber bereits das Ende der Betrachtungen, die diese Reihe in den letzten Jahrzehnten zum Gegenstand gehabt haben, und bei denen die Theorie der Punktmengen eine Rolle spielt. Nachdem man den Begriff der ungleichmäſsigen Convergenz kennen gelernt hatte, stellte sich die Notwendigkeit ein, die ganze Theorie, insoweit sie vorher auf die gliedweise Integration gegründet war, neu zu bearbeiten, und vor allem die beiden Hauptsätze, den der eindeutigen Darstellung und den, der den Coefficienten die Fourier'sche Integralform beilegt, in möglichst weitem Umfang sicherzustellen. Dies ist zugleich das Problem, das die historische Veranlassung zur Ausgestaltung der Mengenlehre geworden ist. Bei der Annahme, daſs die Convergenz an einer unendlichen Menge von Punkten aufhört, hat Cantor seine ersten Definitionen und Sätze über Punktmengen mitgeteilt. Hier dürfte ihre eigentliche Quelle, sowie auch bereits der Ursprung der später entwickelten transfiniten Begriffsbildungen zu erblicken sein[1]). Über die hiermit verbundenen Fragen möge daher noch in Kürze berichtet werden.

Die neue Behandlungsweise der trigonometrischen Reihe knüpft bekanntlich an Heine[2]) an, der zuerst auf die Mängel der Methode der gliedweisen Integration hinwies und das Bedürfnis nach neuen Beweisen hervorhob. Zielpunkt dieser Beweise ist einerseits die Eindeutigkeit der Darstellung, andererseits der Satz, der den Coefficienten die Fourier'sche Form sichert. Die Eindeutigkeit der Darstellung ruht auf zwei wichtigen Sätzen, von denen der eine auf Cantor, der andere auf H. A. Schwarz zurückgeht. Der Satz Cantor's besagt[3]), daſs, wenn die Reihe

$$f(x) = \sum (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

für alle Werte x innerhalb eines Intervalls $a \cdots b$ convergirt, $\lim a_\nu = 0$ und $\lim b_\nu = 0$ ist. Wenn es nun eine zweite trigonometrische Reihe gäbe, mit anderen Coefficienten a_ν und b_ν, die innerhalb $a \cdots b$ dieselbe Function $f(x)$ darstellt, so würde die Differenz eine Function $f_1(x)$ sein, die überall Null ist. Für diese Function $f_1(x)$ bestehen nun aber die von Riemann für jedes derartige $f(x)$ abgeleiteten grundlegenden Formeln. Wird also die aus der Reihe $f_1(x)$ durch zweimalige gliedweise Integration hervorgehende Function mit $F_1(x)$ bezeichnet, so ist gemäſs der einen von ihnen

1) Übrigens hat schon Dirichlet gelegentlich von der Möglichkeit gesprochen, daſs eine durch eine Fourier'sche Reihe darstellbare Function unendlich viele, nirgends dichte Unstetigkeiten haben könne. Lipschitz hat diesen Fall näher untersucht unter der Annahme, daſs die bezügliche Menge eine endliche Zahl von Grenzpunkten besitzt, was ja vom heutigen Standpunkt aus als zu eng bezeichnet werden muſs.

2) Journ. f. Math. 71, S. 353 ff.

3) Journ. f. Math. 72, S. 130 u. 139; vgl. auch 73, S. 294.

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F_1(x+\varepsilon) - 2F_1(x) + F_1(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = f_1(x) = 0.$$

Hier setzt der Satz von Schwarz[1]) ein. Er besagt, dafs eine jede stetige Function $F_1(x)$, für die, wie für die obige, der bezügliche Grenzwert für alle Punkte eines Intervalls Null ist, in diesem Intervall eine lineare Function ist. Aus diesem Satz in Verbindung mit demjenigen Cantor's kann alsdann die Eindeutigkeit der Darstellung leicht geschlossen werden.

Das Vorstehende gilt, wenn die Reihe für alle Punkte innerhalb eines Intervalls convergirt. Die Leistung von Heine besteht nun wesentlich darin, dafs er zuerst eine endliche Zahl von Ausnahmepunkten $\Delta > 0$ ins Auge fafste, in denen die Convergenz der Reihe aufhört. Die Function $F_1(x)$ des Schwarz'schen Satzes ist alsdann in jedem bezüglichen Teilintervall von $a \cdots b$ eine lineare Function, und da für sie im ganzen Intervall gemäfs einer zweiten Riemann'schen Formel

$$\lim \frac{F_1(x+\varepsilon) - 2F_1(x) + F_1(x-\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

ist, so ist sie, wie bereits im Satz IX von Cap. 4 bewiesen ist, im ganzen Intervall linear. Dies ist das von Heine abgeleitete Resultat. Das gleiche gilt dem eben citirten Satze gemäfs aber auch dann, wenn die Punkte $\Delta > 0$ eine beliebige abzählbare und abgeschlossene Menge bestimmen. Dieses Theorem ist es, das Cantor im Anschlufs an den Satz Heine's für die bis dahin von ihm geschaffenen Punktmengen zuerst ausgesprochen hat[2]); es ist überdies unabhängig von den Werten von Δ. Diesem Theorem kommt, wie bereits früher hervorgehoben wurde, die historische Bedeutung zu, die Mengenlehre gefordert und begründet zu haben. Mit ihm war zum ersten Mal die bis dahin vorhandene, sehr unbestimmte Vorstellung über die Verteilung unendlicher Punktmengen durch eine präcise Begriffsbestimmung ersetzt[3]).

Das allgemeinste, in dieser Hinsicht für die Theorie der trigonometrischen Reihen erreichbare Resultat wurde übrigens erst von Harnack[4]) ausgesprochen. Der Harnack'sche Satz ist eine Verallgemeinerung des erstgenannten Cantor'schen Satzes und kann folgendermafsen ausgesprochen werden:

XIII. Wenn bei einer trigonometrischen Reihe die Punkte

1) Der Satz wurde von Cantor mitgeteilt, a. a. O., S. 138.

2) Math. Ann. 5, S. 130.

3) Die obigen Sätze lassen sich auf analog gebaute Reihen (Kugelfunctionen u. s. w.) übertragen; vgl. Dini, Ann. di mat. (2) 6, S. 112, Ascoli, ebda. (2) 7, S. 258, C. Neumann, Math. Ann. 22, S. 400, sowie Arzelà, Mem. di Bologna (5) 4, S. 373.

4) Math. Ann. 19, S. 251.

$\varDelta \geqq k$ für jedes k eine nirgends dichte Menge L bilden, so ist $\lim a_\nu = 0$ und $\lim b_\nu = 0$.

Der Beweis folgt durchaus demjenigen, den Cantor für den von ihm herrührenden einfacheren Satz gegeben hat. Man wähle $4k < \sigma' < \sigma$ und betrachte die zu k gehörige Menge L. Ist x ein innerer Punkt eines zu ihr gehörigen punktfreien Intervalls δ, so giebt es um x ein innerhalb δ liegendes Intervall $\delta' = x - \varepsilon \cdots x + \varepsilon$, und es sei $x' = x + \varepsilon'$ ein innerer Punkt dieses Intervalls. Alsdann ist x' ein Punkt $\varDelta < k$, und es folgt aus der Definition der Unbestimmtheitsgrenzen, dafs von einem gewissen ν an

$$|a_\nu \cos \nu x' + b_\nu \sin \nu x'| < k$$

bleibt. Wird x' durch $x + \varepsilon'$ resp. $x - \varepsilon'$ ersetzt, so folgt hieraus, dafs auch

$$|a_\nu \cos 2\nu\varepsilon'| < \sigma' \quad \text{und} \quad |b_\nu \sin 2\nu\varepsilon'| < \sigma'$$

ist. Wäre nun $\lim |a_\nu| > 0$, so gäbe es ins Unbegrenzte wachsende Zahlen

$$\nu', \nu'', \nu''', \ldots,$$

so dafs alle Coefficienten $a_{\nu'}, a_{\nu''}, a_{\nu'''}, \ldots$ dem absoluten Betrage nach oberhalb einer Gröfse σ blieben. Der weitere Schlufs beruht nun darauf, dafs man alsdann unter den Gröfsen $\nu', \nu'', \nu''', \ldots$ wieder eine unbegrenzte Teilreihe $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ und zu ihr einen Wert $\varepsilon_1 < \varepsilon$ bestimmen kann, so dafs, wie auch ε beschaffen ist,

$$\sin 2\nu_1\varepsilon_1 > \frac{\sigma'}{\sigma}, \quad \sin 2\nu_2\varepsilon_1 > \frac{\sigma'}{\sigma}, \quad \sin 2\nu_3\varepsilon_1 > \frac{\sigma'}{\sigma} \cdots$$

ist, was gegen die vorstehende Ungleichung verstofsen würde. Da dies nun für jedes beliebige σ bestehen bleibt, so mufs $\lim a_\nu = 0$ sein, und ebenso folgt $\lim b_\nu = 0$[1]).

Aus dem Satz von Harnack fliefst noch die Folgerung, dafs, wenn eine trigonometrische Reihe für eine überall dichte Menge convergirt und nicht $\lim a_\nu = 0$ und $\lim b_\nu = 0$ ist, es stets einen endlichen Wert k giebt, so dafs auch die Punkte $\varDelta \geqq k$ überall dicht liegen. Eine Reihe, für die dies zutrifft, ist z. B. die in Riemann's Schrift am Ende genannte Reihe $\Sigma \sin \nu! x\pi$.

In dem Fall, dafs man es mit einer beliebigen trigonometrischen Reihe zu thun hat, sind weitere Resultate nicht bekannt geworden. Um zu solchen zu gelangen, mufs man annehmen, dafs die Reihe eine integrirbare Function $f(x)$ darstellt. Alsdann haben, wie durch

1) Dieser Satz läfst sich übrigens auch aus dem früher erwähnten allgemeinen Theorem von C. Arzelà folgern. Der Unterschied ist der, dafs bei der eben angegebenen Ableitung ein Wert ε_1 direct construirt wird, während im Theorem von Arzelà nur die allgemeine Existenz eines solchen Wertes gefolgert wird.



du Bois und O. Hölder in eingehender Weise begründet worden ist, die Coefficienten immer die bekannte Fourier'sche Integralform. Ist daher $f(x)$ eine solche im Intervall $-\pi \cdots \pi$ integrirbare Function, und ersetzt man in der Reihe die Coefficienten durch die mit der Function $f(x)$ gebildeten Integralformeln, so stellt diese Reihe die Function $f(x)$ in dem Sinn dar, dafs sie an allen Convergenzstellen, an denen $f(x)$ stetig ist, den Functionswert von $f(x)$ liefert und an allen eigentlichen Sprungstellen den bekannten Mittelwert. Ein weitergehendes Resultat giebt Hölder[1]); er zeigt, dafs an einer Convergenzstelle stets ein gewisser aus Integralwerten gebildeter Grenzwert existirt, der dem Wert der Reihe gleich ist. Wie sich jedoch diese Reihe an einem Punkt $\varDelta > 0$ verhält, darüber habe ich ein präcises Resultat bisher nicht gefunden. Es dürfte jedenfalls zu vermuten sein, dafs die durch die Reihe definirte Function stets eine möglichst stetige Function $\varphi(x)$ ist. Die Frage aber, ob an jedem Punkt $\varDelta = k$ diese Function einen Unstetigkeitspunkt $\omega = k$ besitzt, glaube ich in diesem allgemeinen Umfang verneinen zu müssen[2]).

Den vorstehend erwähnten Satz, der den Coefficienten die Fourier'sche Integralform sichert, hat du Bois[3]) zunächst für den Fall abgeleitet, dafs $f(x)$ überall endlich ist, er hat aber auch bereits die Möglichkeit erörtert, dafs Unendlichkeitspunkte in unendlicher Anzahl vorhanden sind. Die allgemeinste Erledigung des letztgenannten Falles verdankt man jedoch erst Hölder[4]). Wie er gezeigt hat, so haben, wenn die Punkte $\varDelta = \infty$ eine abzählbare und abgeschlossene nirgends dichte Menge Q bestimmen, die Coefficienten immer dann die Fourier'sche Form, wenn $f(x)$ selbst ein uneigentliches Integral besitzt, und auch die andern in die Coefficientenwerte eingehenden uneigentlichen Integrale einen Sinn haben.

Da in diesem Bericht gezeigt ist, dafs die wesentlichen Eigenschaften des Integralbegriffs auf die uneigentlichen Integrale immer dann übertragbar sind, wenn die Intervalle der Menge D eine abzählbare Menge Q bestimmen, so bedarf das Resultat Hölder's kaum einer näheren Begründung. Insbesondere bleiben ja der Fundamentalsatz der Integralrechnung und die Sätze von Schwarz und du Bois, die angeben, wann eine Function eine lineare Function ist, für die hier in Frage stehenden uneigentlichen Integrale ebenso in Kraft, wie für die eigentlichen. Diese Sätze bilden aber die Grundlage, um einerseits die Eindeutigkeit der Coefficienten und andererseits

1) Math. Ann. 24, S. 208.
2) Vgl. auch Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, übersetzt von Harnack, S. 368.
3) Abh. d. Ak. d. Wiss. München, Bd. 12, S. 120 ff.
4) Math. Ann. 24, S. 181.

ihre Darstellbarkeit durch die Fourier'schen Integralformeln zu erschliefsen. Allerdings wenn diese Integralformeln einen wirklichen Sinn haben sollen, so ist naturgemäfs noch erforderlich, dafs die sämtlichen in diese Integrale eingehenden Functionen

$$f(x) \sin \nu x \quad \text{und} \quad f(x) \cos \nu x$$

ebenfalls uneigentliche Integrale besitzen.

Bei Gelegenheit dieser Untersuchung war es übrigens, dafs Hölder zu dem Resultat gelangte, dafs jedenfalls die uneigentlichen Integrale erster Art, bei denen also die Menge K_∞ abzählbar ist, dem Fundamentalsatz der Integralrechnung genügen.

Endlich möchte ich darauf hinweisen, dafs die Abzählbarkeit der vorstehenden Menge Q auch wirklich die äufserste Grenze der hier zulässigen Annahmen darstellt. Die Erörterungen von Capitel 4 zeigen nämlich, dafs die Sätze, in denen wir die Grundlage der Schlüsse zu erblicken haben, nicht mehr bestehen, falls Q eine perfecte Menge ist. Weder gilt dann der Satz V noch auch der Satz IX dieses Capitels. Gerade mit Rücksicht hierauf habe ich geglaubt den Untersuchungen von Capitel 4 einen breiteren Spielraum einräumen zu sollen.

Auf die hier noch nicht berührte Frage, wann eine gegebene stetige Function durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, denke ich im vierten Abschnitt des Berichts näher eingehen zu können.

Register.

Hervorgegangen aus dem seit Jahren empfundenen Bedürfnisse nach einem engeren wissenschaftlichen und persönlichen Zusammenschlufs der Fachgenossen, hat sich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung gebildet mit der Aufgabe: „in gemeinsamer Arbeit die Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern und auszubauen, ihre verschiedenen Teile und zerstreuten Organe in lebensvolle Verbindung und Wechselwirkung zu setzen, ihre Stellung im geistigen Leben der Nation nach Gebühr zu heben, ihren Vertretern und Jüngern Gelegenheit zu ungezwungenem kollegialischen Verkehr und zum Austausch von Ideen, Erfahrungen und Wünschen zu bieten".

Dementsprechend bringen die Jahresberichte u. a. über die geschäftlichen Angelegenheiten und über die auf den Jahresversammlungen gehaltenen Vorträge Berichte, ferner alljährlich ein Verzeichnis der Mitglieder mit genauer Adressenangabe, Nekrologe über die verstorbenen Mitglieder mit beigefügten Porträts und enthalten aufserdem gröfsere Referate über einzelne Zweige der gesamten mathematischen Wissenschaften. Diese Referate, welche den gegenwärtigen Stand unserer bez. Kenntnisse in historisch-kritischer Darstellung zusammenfassen, sind von anerkanntem wissenschaftlichen Werte; sie bieten jedem die Möglichkeit, einen Einblick in die geistigen Bestrebungen der Gegenwart zu gewinnen, wie ihn auch derjenige besitzen sollte, der durch seinen Beruf mehr oder weniger an der selbstthätigen Fortbildung der Wissenschaft gehindert ist.

In den bisher erschienenen Bänden [I. 1892. ℳ 7.60; II. 1893. ℳ 4.50; III. 1894. ℳ 16.—; IV. 1897. ℳ 16.—; V. 1897/98. ℳ 7.20; VI. 1899. ℳ 8.—; VII. 1899. ℳ 12.80] kamen folgende gröfsere Referate zum Abdruck:

I: **W. Frz. Meyer:** Die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert. 1892.

II: **Fr. Kötter:** Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck. 1893.

III: **A. Brill** und **M. Noether:** Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. 1894.

III: **L. Henneberg:** Über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke. 1894.

IV: **D. Hilbert:** Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. 1897.

V: **E. Kötter:** Die Entwicklung der synthetischen Geometrie. 1898.

VI: **G. Bohlmann:** Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimal-Rechnung von Euler bis auf die heutige Zeit. 1899.

S. Finsterwalder: 1) Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. 1899. 2) Mechanische Beziehungen bei der Flächen-Deformation. 1899.

VII: **E. Czuber:** Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. 1899.

VIII: **A. Schoenflies:** Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. 1900.

IX. **K. Heun:** Über die kinetischen Probleme der wissenschaftl. Technik. 1900.

In Vorbereitung für die nächsten Bände befinden sich:

R. Haussner: Numerische Auflösung von Gleichungen.

A. Kneser: Bericht über die Variationsrechnung.

E. Kötter: Die Entwicklung der synthetischen Geometrie. Teil II.

G. Kowalewski, G. Scheffers, F. Schur: Referate über die Arbeitsgebiete von Sophus Lie.

R. Mehmke: Bericht über die graphischen Methoden.

Müller-Breslau: Über die modernen Methoden zur statischen Berechnung der Bauconstructionen.

L. Schlesinger: Über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

A. Schoenflies: Über Curven- und Punktmannigfaltigkeiten. II.

P. Stäckel: Über die allgemeine Dynamik.

E. Steinitz: Bericht über die Theorie der endlichen Gruppen.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Z. gegen 500 Mitglieder. Diese erhalten obige Publikation bei direktem Bezuge von der Mathematiker-Vereinigung zu einem Vorzugspreise. Anmeldungen zur Mitgliedschaft nimmt Prof. Dr. **A. Gutzmer** in Jena, Wildstrafse 2, entgegen. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden.


Digitized by Google